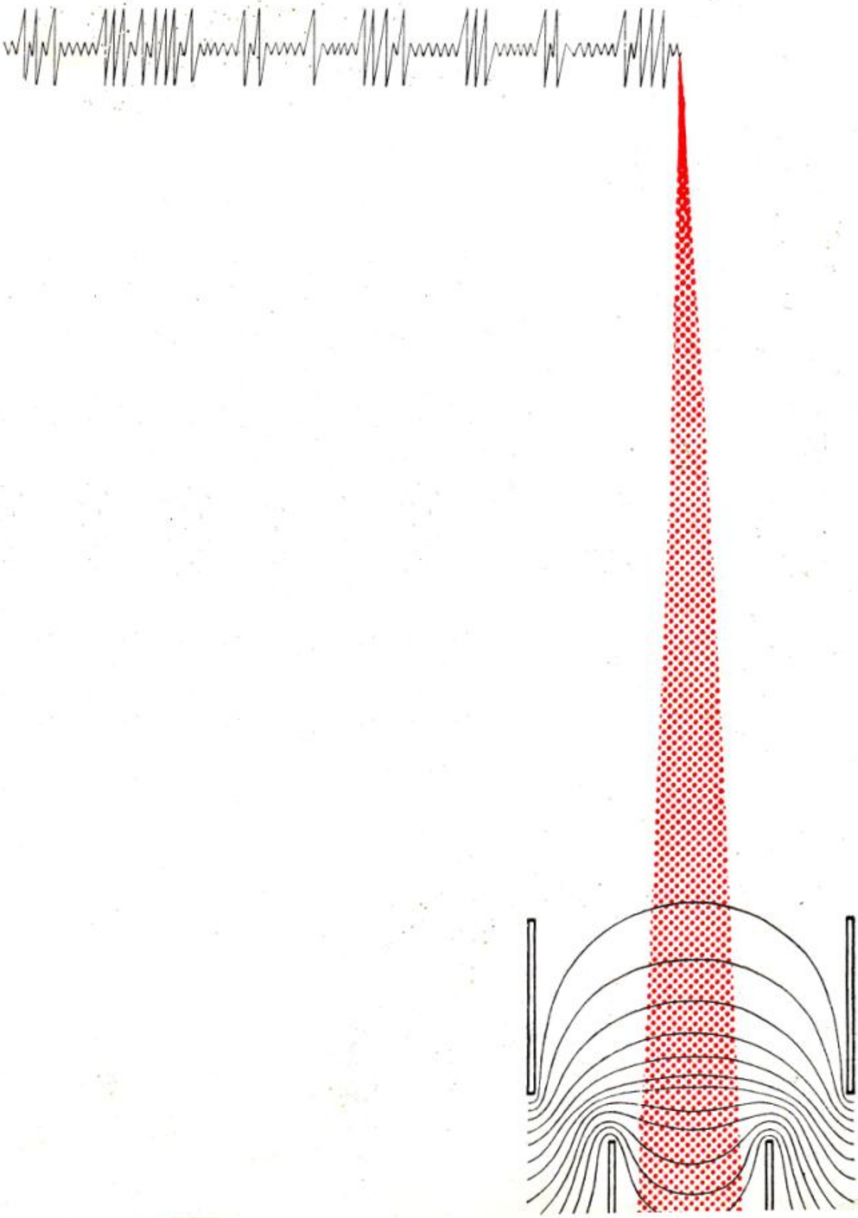
ISSN 0021—3454

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ



1986
4

ЛИТЕРАТУРА

1. Современная теория систем управления./Под ред. К. Т. Леондеса. — М.: Наука, 1970, с. 103—113.
2. *Баранчук Е. И.* Взаимосвязанные и многоконтурные регулируемые системы. — Л.: Энергия, 1968, с. 162—195.

Рекомендована кафедрой кибернетики

Поступила в редакцию 24 января 1984 г.

УДК 62-50

КРИТЕРИЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н. А. БАЛОНИН, О. С. ПОПОВ

Ленинградский институт авиационного приборостроения

Рассмотрены особенности линейных динамических систем применительно к проблеме параметрической идентификации. Сформулированы общие условия идентифицируемости непрерывных многосвязных систем. Введено понятие и указаны условия структурной идентифицируемости систем. Установлена связь условий управляемости и идентифицируемости.

При параметрической идентификации одной из проблем является определение параметров математической модели объекта по наблюдению входных и выходных переменных. Независимо от применяемых методов такая задача не всегда имеет единственное решение, и это обстоятельство порождает определенные трудности при теоретическом исследовании и практическом решении задач идентификации. Критерий единственности решения задачи параметрической идентификации впервые сформулирован в работе [1] применительно к весьма частному классу систем. Выведем более общие условия существования и единственности решения задач идентификации многосвязных управляемых динамических систем.

Постановка задачи. Рассматривается система вида

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) \triangleq x_0 \neq 0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$ — векторы состояния и управления соответственно; A, B — стационарные матрицы соответствующих размерностей, определенные над полем вещественных чисел. Предполагается, что векторы состояния и управления полностью доступны для измерения. Целью настоящей работы является выяснение условий, при которых задача определения матриц A, B по наблюдению $x(t)$, $u(t)$ имеет единственное решение, совпадающее с истинными значениями параметров системы (1). Учитывая неоднозначность толкования в литературе термина «идентифицируемость», введем следующее определение. Если существует управление $u(t)$, такое, что при заданном начальном состоянии x_0 матрицы A, B системы (1) могут быть восстановлены единственным образом по наблюдению процесса $x(t)$, $u(t)$ на некотором отрезке времени, то система называется идентифицируемой. В противном случае систему будем называть неидентифицируемой.

Условие идентифицируемости. Система (1) является идентифицируемой в том и только в том случае, если

$$Rank\,[B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B \mid x_0 \mid Ax_0 \mid \ldots \mid A^{n-1}x_0] = n. \qquad (2)$$

Матрицу в квадратных скобках будем называть матрицей идентифицируемости и обозначим W. Заметим, что $W = (W_y \mid W_0)$, где $W_y = [B \mid AB \mid \ldots \mid A^{n-1}B]$ — матрица управляемости, $W_0 = [x_0 \mid Ax_0 \mid \ldots \mid \ldots$ $\ldots A^{n-1}x_0]$.

Для доказательства необходимости условия (2) допустим, что, кроме системы (1), процессу $x(t)$, $u(t)$ также соответствует система

$$\dot{x} = A_m x + B_m u, \qquad (3)$$

где A_m, B_m — матрицы тех же размерностей, что и A, B.

Тогда, очевидно, имеем

$$(A_m - A)\,x(t) + (B_m - B)\,u(t) = 0. \qquad (4)$$

Заметим, что

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = \left[\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k(t)A^k\right]x_0 + \\ + \int_0^t\left[\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k(t-\tau)A^k\right]Bu(\tau)\,d\tau, \qquad (5)$$

где p — степень минимального аннулирующего полинома матрицы A; $\alpha_k(t)$ — коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа—Сильвестра, построенного для функции $e^{\lambda t}$, которая определена на спектре матрицы A. Обозначим $\gamma_k(t) = \int_0^t \alpha_k(t-\tau)u(\tau)\,d\tau$. Тогда (5) можно представить в виде $x(t) = Q\Gamma(t)$, где

$$Q = [B \mid AB \mid \ldots \mid A^{p-1}B \mid x_0 \mid Ax_0 \mid \ldots \mid A^{p-1}x_0],$$
$$\Gamma = [\gamma_0^{\mathrm{T}}(t) \mid \gamma_1^{\mathrm{T}}(t) \mid \ldots \mid \gamma_{p-1}^{\mathrm{T}}(t) \mid \alpha_0(t),\ \alpha_1(t), \ldots,\ \alpha_{p-1}(t)],$$

причем T — символ транспонирования.

Отметим для сведения, что $\alpha_k(t)$ является скаляром, тогда как $\gamma_k(t)$ — вектор размера m. Теперь вместо (4) можем записать $(A_m - A)Q\Gamma(t) + (B_m - B)u(t) = 0$. Если векторы $\Gamma(t)$ и $u(t)$ покоординатно линейно независимы на интервале идентификации, то из последнего имеем

$$\begin{cases} (A_m - A)\,Q = 0 \\ B_m = B. \end{cases} \qquad (6)$$

Первое из этих уравнений однозначно определяет $A_m = A$ при $Rank\,Q = n$. Известно, однако, что у расширенной матрицы, которая образована добавлением к матрице Q блоков $A^p x_0$, $A^{p+1}x_0, \ldots, A^pB$, $A^{p+1}B, \ldots$, ранг остается таким же, как у матрицы Q [2]. Поэтому, если $Rank\, Q=n$, то и $Rank\, \mathbb{W}=n$. Таким образом, необходимость условия (2) доказана. Доказательство достаточности сводится к выяснению вопроса о том, возможно ли обеспечить линейную независимость координат $\Gamma(t)$ и $u(t)$ на заданном интервале времени, что не составляет принципиальных трудностей, но является громоздким. Можно показать, что упомянутая линейная независимость координат $\Gamma(t)$ и $u(t)$ имеет место в случаях, когда управление $u(t)$ является разрывным или кусочно-непрерывным. Последнее выполняется для управляемых систем практически всегда.

Следствия. При $B=0$ из (2) получаем условие идентифицируемости однородной системы $\dot{x}=Ax$, которое имеет вид

$$Rank\, \mathbb{W}_0=n. \tag{7}$$

Поэтому матрицу $\mathbb{W}_0$ будем называть матрицей идентифицируемости однородной системы. Заметим, что (7) аналогично сформулированному в работе [1] условию идентифицируемости однородных дискретных систем. Из (2), очевидно, следует, что полностью управляемая система всегда идентифицируема. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Заметим, что $Rank\, \mathbb{W}$ не превосходит наименьшего из чисел n или $mp+p$ (соответственно число строк или столбцов матрицы Q). Поэтому для идентифицируемых систем должно выполняться условие

$$(m+1)\, p \geqslant n. \tag{8}$$

Если условие (8) не выполнено, то система (1) не является полностью управляемой, а задача параметрической идентификации не имеет единственного решения независимо от выбора вектора начального состояния x_0. Такие системы будем называть структурно неидентифицируемыми. Если же (8) выполнено, то систему будем называть структурно идентифицируемой. Из (8) при $m=0$ следует условие структурной идентифицируемости однородных систем, которое имеет вид $p=n$, т. е. степень минимального аннулирующего полинома матрицы A должна быть в этом случае равна степени ее характеристического полинома.

Не следует считать, что задача параметрической идентификации структурно неидентифицируемой системы (1) принципиально не имеет единственного решения ни при каких условиях. Такое решение может быть получено по нескольким «запускам» процесса при линейно независимых начальных состояниях. Действительно, каждая модель A_{mj} системы (3), построенная по наблюдениям процесса $x(t)$, $u(t)$ при различных x_{0j}, $(j=\overline{1,\, q})$, удовлетворяет первому уравнению (6), которое можно представить в виде

$$(A_{mj}-A)\, Q_j=0, \quad \forall j \overline{(1,\, q)}, \tag{9}$$

где $Q_j=\left(B_m \,\vdots\, A_{mj}B_m \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A_{mj}^{p-1}B_m \,\vdots\, x_{0j} \,\vdots\, A_{mj}x_{0j} \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A_{mj}^{p-1}x_{0j}\right)$.

Уравнения (9) запишем более компактно

$$A\,(Q_1 \,\vdots\, Q_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, Q_q) = (A_{m1}Q_1 \,\vdots\, A_{m2}Q_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A_{mq}Q_q). \tag{10}$$

Система (10) совместна, а выполнение условия

$$Rank\,(Q_1 \,\vdots\, Q_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, Q_q) = n \tag{11}$$

означает, что решение этой системы A является единственным, соответствующим истинным значениям параметров системы (1).

Но ранее было отмечено, что для расширенной матрицы

$$W_j = \left(B_m \,\vdots\, A_{mj}B_m \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A_{mj}^{n-1}B_m \,\vdots\, x_0 \,\vdots\, A_{mj}x_0 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, A_{mj}^{n-1}x_0\right)$$

имеем $Rank\,W_j = Rank\,Q_j$, поэтому вместо (11) можем записать

$$Rank\,(W_1 \,\vdots\, W_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, W_q) = n. \tag{12}$$

Полученный результат является условием полной параметрической идентифицируемости структурно неидентифицируемых систем по нескольким запускам процесса $x(t)$, $u(t)$.

Анализируя (12), можно придти к выводу о целесообразности послеидентификационной проверки адекватности полученного результата. Такая проверка должна состоять в вычислении ранга наращиваемой матрицы $(W_1 \,\vdots\, W_2 \,\vdots\, \ldots)$ вплоть до выполнения условия (12).

Пример. Для простоты ограничимся задачей идентификации однородной системы $\dot{x} = Ax$. Условие (12) в этом случае, очевидно, имеет вид

$$Rank\,(W_{01} \,\vdots\, W_{02} \,\vdots\, \ldots) = n.$$

Пусть результатом идентификации системы при начальном состоянии $x_{01} = (1,\ 1)^T$ является матрица

$$A_{m1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая матрица идентифицируемости имеет вид

$$W_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $Rank\,W_{01} = 1 < n$. Следовательно, матрица A_{m1} не полностью соответствует идентифицируемой системе. Поэтому назначим новое начальное состояние $x_{02} = (1,\ 0)^T$. Пусть результатом идентификации в этом случае является матрица

$$A_{m2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая матрица идентифицируемости имеет вид

$$W_{02} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $Rank\,W_{02} = 1 < n$ и, таким образом, матрица A_{m2} также имеет частный характер.

Вместе с тем легко усматривается, что $Rank\,(W_{01} \,\vdots\, W_{02}) = 2$. Следовательно, имеющиеся данные в виде A_{m1}, A_{m2}, x_{01}, x_{02} достаточны для получения истинных значений параметров системы. Запишем уравнение (10), имея в виду, что в данном случае $W_j = Q_j$, $\forall j\overline{(1,\ 2)}$:

$$A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем окончательно $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Легко видеть, что однородная система с этой матрицей является структурно неидентифицируемой, ибо $p=1<n$. Непосредственно проверяется, что частные решения однородных систем с матрицами A и A_{m1} при начальном состоянии x_{01} совпадают; то же справедливо для систем с матрицами A и A_{m2} при начальном состоянии x_{02}.

Условия (2), (8), (12) допускают удобную геометрическую интерпретацию. Она сводится к тому, что векторы x_0 и b_j $(j=\overline{1, m})$ — столбцы матрицы B должны возбуждать движения системы вдоль всех осей базиса матрицы A, который в общем случае образован как собственными, так и корневыми жордановыми векторами этой матрицы. В противном случае часть возможных движений системы не может быть выявлена, и система (1) является неидентифицируемой.

Таким образом, в работе установлены некоторые достаточно общие условия идентифицируемости многосвязных динамических систем. Наряду с понятием управляемости и наблюдаемости идентифицируемость и структурная идентифицируемость определяют основные свойства динамических систем. Исследование ограничено классом линейных стационарных систем, ибо и при этом выявляются важнейшие особенности, часто не учитываемые при решении задач идентификации. Исследования проблемы непосредственно не связаны с задачами анализа сходимости вычислительных алгоритмов параметрической идентификации, однако могут объяснять расхождение этих алгоритмов, когда выполнены формальные требования сходимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. — М.: Наука, 1966.
2. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.

Рекомендована кафедрой
электрооборудования
летательных аппаратов

Поступила в редакцию
19 марта 1985 г.

УДК 681.5.015

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОРЯДКА МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ

Ю. П. РЫШКОВ, С. Е. БОГОМОЛОВ, А. Ю. ШЕВЧЕНКО

Ленинград

Рассматриваются авторегрессионные модели случайных временных рядов. Предлагается простой и оригинальный метод определения порядка модели авторегрессии, основанный на факте смещения оценок параметров при неправильном выборе порядка.

Известные в литературе способы [1, 2, 4] определения порядка авторегрессионных моделей временных рядов основаны, как правило, на анализе функции ошибок. Увеличение числа параметров модели