УДК 519.61:511-33

ВЗВЕШЕННАЯ КОНФЕРЕНЦ-МАТРИЦА, ОБОБЩАЮЩАЯ МАТРИЦУ БЕЛЕВИЧА НА 22-м ПОРЯДКЕ

Н. А. Балонин,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
М. Б. Сергеев,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Приводится взвешенная конференц-матрица **W**(*n, n*–2)*, обобщающая матрицу Белевича на порядке 22. Дается оценка максимальности ее определителя на классе квазиортогональных матриц этого порядка сравнением с экстремальной модульно шестиуровневой М-матрицей диагонального типа.*

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, квазиортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы Белевича, взвешенные конференц-матрицы.*

В работе [1] определен класс матриц Белевича (конференц-матриц или С-матриц), известный своей ролью в построении матриц Адамара. Это квадратные матрицы порядка n, кратного 2, с нулевой диагональю и остальными элементами {1, –1}, обладающие свойством $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}=(n-1)\mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

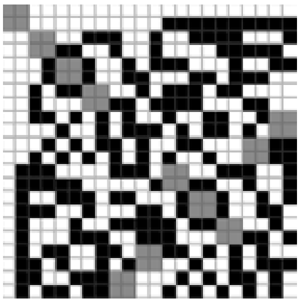
Задача построения конференц-матриц сложна, так, в частности, до сих пор неизвестен вид матриц Белевича 66-го порядка. Данный класс был обобщен так называемыми взвешенными конференц-матрицами $\mathbf{W}(n,\ n-k)$, отличающимися от матриц Белевича количеством $k\ge 1$ нулевых элементов каждой строки или столбца и более общим уравнением $\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}=(n-k)\mathbf{I}$.

Необходимое условие существования целочисленных матриц обоего типа — разложимость числа $n-k$ на сумму квадратов двух целых чисел [2]. При $k=1$ порядки, для которых не существуют конференц-матрицы, таковы: 22, 34, 58, 70, 78, 94 ... . Определенная надежда в связи с этим возлагается на взвешенные матрицы, поскольку очевидно, что на разрешимость задачи можно влиять, изменяя целочисленный параметр k.

К сожалению, более общие классы матриц изучены хуже. Относительно недавно (в 2003 г.) была опубликована матрица 15-го порядка, обладающая на классе матриц с элементами {1, –1} качеством матриц Адамара иметь максимальное значение модуля определителя [3]. Классификация взвешенных конференц-матриц с элементами {0, 1, –1} завершена для случаев $n-k\le 5$, возможные варианты решения предложены для порядков $n\le 15$, меньших первого проблемного порядка для матриц Белевича [4, 5].

В связи с этим в работе [6] была предложена аппроксимация несуществующей матрицы Белевича 22-го порядка матрицами с несколькими разрешенными значениями модулей элементов — уровнями [7], меньшими или равными 1. Программный поиск такой М-матрицы [8] позволил выделить три шестиуровневых варианта, из них матрица с самым малым уровнем элементов диагонали уступила по величине определителя итоговой экстремальной версии $\mathbf{M}_{22}$ (рис. 1).

■ *Рис. 1.* Портрет шестиуровневой матрицы $\mathbf{M}_{22}$ и гистограмма ее элементов



■ *Рис. 2.* Портрет взвешенной конференц-матрицы матрицы $\mathbf{W}_{22}$

Оригинальный алгоритм [8, 9], использованный для анализа предыдущей проблемы, подтвердил разрешимость задачи поиска матрицы с целочисленными элементами {0, 1, –1} ввиду разложимости числа $n-2=20$ на сумму квадратов чисел 2 и 4. Определена матрица $\mathbf{W}_{22}=\mathbf{W}(n, n-2)$ при $n=22$, обладающая необходимыми структурными признаками взвешенных конференц-матриц, показанная на рис. 2, где элементы 1 и –1 отображены клетками черного и белого цвета, а нулевые элементы — серыми клетками.

После удаления каймы из первых двух строк и столбцов такая матрица блочно-симметрична при делении ее пополам по вертикали и горизонтали. Диагональные блоки совпадают, а внедиагональные равны друг другу с точностью до знака. Нулевые элементы могут быть выстроены в блоки 2×2 вдоль диагонали, отражая идею построения матриц Белевича. Следующий принципиальный и важный вопрос состоит в сравнении определителей матриц, отражающих две тенденции в аппроксимации отсутствующих матриц Белевича матрицами диагонального $\mathbf{M}_{22}$ и блочно-диагонального $\mathbf{W}_{22}$ типов.

Предположение. На классе квазиортогональных матриц четного порядка, кратного 2, при проблемных его значениях максимальным значением определителя обладают взвешенные конференц-матрицы Белевича.

Предположение можно обосновать тем, что на порядках, равных и больших $n=22$, относительная доля нулевых элементов невелика. Это справедливо даже если необходимое условие разрешимости задачи требует размещения нескольких нулей около диагонали. $\det(\mathbf{W}(n, n-k))=(n-k)^{n/2}$ слабо зависит от малых значений параметра k, используемого для согласования условий разрешимости. Так, $\det(\mathbf{W}_{22})=204\,800\,000\,000\,000$, а при $k=1$ получим оценку недостижимого значения 350 277 500 542 221.

Поскольку М-матрица $\mathbf{M}_{22}$ также представляет собой взвешенную ортогональную матрицу, ее определитель зависит от веса $\det(\mathbf{M}_{22})=1/m^n$, где m — величина максимального элемента ортогональной матрицы [10]. Для $\mathbf{M}_{22}$ величина $m=0{,}226855..$, т. е. $\det(\mathbf{M}_{22})=149\,120\,095\,399\,252$ [6]. Отсюда следует, что варьирование уровнями элементов (при попытке сохранить строго диагональную структуру матриц Белевича) менее эффективно, чем переход к блочно-диагональной форме взвешенных матриц.

Стоит отметить, что публикация редких артефактных матриц входит в мировую практику, еще один путь вычисления матриц $\mathbf{W}(n, n-2)$ связан с использованием комплементарных последовательностей Голея (Golay) [11].

Литература

1. **Belevitch V.** Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony // Electr. Commun. 1950. Vol. 26. P. 231–244.
2. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5. С. 2–8.
3. **Orrick W. P.** The maximal {-1, 1}-determinant of order 15 (accepted for publication in Metrika). http://arxiv.org/abs/math.CO/0401179 (дата обращения: 15.08.2013).
4. **Koukouvinos C., Seberry J.** On weighing matrices // Utilitas Math. 1993. Vol. 43. P. 101–127.
5. **Harada M., Munemasa A.** On the classification of weighing matrices and self-orthogonal codes. 2011. http://arxiv.org/abs/1011.5382 (дата обращения: 15.08.2013).
6. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** М-матрица 22-го порядка // Информационно-управляющие системы. 2011. № 5. С. 87–90.
7. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О двух способах построения матриц Адамара — Эйлера // Информационно-управляющие системы. 2013. № 1. С. 7–10.
8. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** Алгоритм и программа поиска и исследования М-матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3. С. 82–86.
9. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** М-матрицы // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 14–21.
10. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 160 с.
11. **Себбери Дж.** Сетевая база взвешенных конференц-матриц. http://www.uow.edu.au/~jennie/sequences.html (дата обращения: 15.08.2013).