УДК 519.715:614
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.17

ДИСКРЕТНЫЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Н. А. Балонин[a], *доктор техн. наук, профессор*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Цель: *в теории динамических систем не сложилось характерное для теории сигналов разделение их частотных характеристик на непрерывные и дискретные. Цель исследования — устранить отмеченный недостаток введением в дискретные частотные характеристики линейных динамических систем финитного времени на примере элементарных звеньев первого и второго порядков.* ***Результаты:*** *показано различие между непрерывными на бесконечном времени и дискретными на ограниченном временном отрезке частотными характеристиками систем и сигналов. Приведено определение дискретных частотных характеристик линейных динамических систем финитного времени. Описаны численные и аналитические методы их нахождения, комментируется метод натурного эксперимента. Выведена передаточная функция нестационарного линейного звена оператора флипа (реверса сигнала во времени). Даны характеристики элементарных звеньев первого и второго порядков, описываемых передаточными функциями интегратора, двойного интегратора, апериодического и консервативного звеньев. Показано, что точки их дискретных частотных характеристик располагаются на амплитудных частотных характеристиках звеньев.* ***Практическая значимость:*** *дискретные частотные характеристики дополняют классические непрерывные, согласуются с ними по амплитудам и выступают как уточняющие, учитывающие важный для практики фактор — конечное время протекания процессов. Разработано соответствующее программное обеспечение для математической сети Интернет.*

Ключевые слова *— динамические системы, финитные системы, частотные характеристики, непрерывный спектр, дискретный спектр, элементарные звенья.*

Введение

В теории сигналов практикуется разложение сигналов в непрерывный и дискретный спектры, характерные, соответственно, для бесконечного и конечного отрезков времени [1, 2]. В теории динамических систем дискретная форма спектральной характеристики непрерывной системы, рассматриваемой при конечном времени течения процессов, не сложилась. Понятие дискретной частотной характеристики (ДЧХ) отсутствует.

Пояснить данное обстоятельство можно тем, что на ограниченном отрезке времени элементарные гармоники, проходящие через систему, помимо вынужденных составляющих, возбуждают также компоненты, отвечающие свободному движению. Таким образом, выходной сигнал системы, если его разложить по тем же самым гармоникам, что и входной, не обнаруживает простой преемственности, необходимой для констатации коэффициентов усиления на частотах, им соответствующих.

Выход из этого положения [3–9] состоит в том, чтобы для заданного отрезка времени протяженностью T выбрать в качестве элементарных базисных сигналов не гармоники, а алгебраические суммы гармоник (полигармонические сигналы), отличающиеся от прочих сигналов тем, что возбуждаемые их составляющими свободные движения компенсируют друг друга. В таком случае можно вычислять коэффициенты усиления полигармонических сигналов, упорядочиваемых по номерам или по частотам одной из их составляющих — частоты входящих в сигнал гармоник между собой связаны.

При согласованном определении точки дискретного спектра динамической системы (ДЧХ) располагаются на графике классической амплитудной частотной характеристики (АЧХ). Сходно связаны между собой непрерывный и дискретный спектры сигналов, отсчеты частот базисных функций идут равномерно.

В отличие от них точки дискретного спектра динамической системы описывают ее индивидуальность, особенно проявляемую на отрезке времени, сопоставимом со временем переходного процесса в ней. Эти особенности и математический аппарат построения можно увидеть на примерах ДЧХ элементарных динамических звеньев, рассматриваемых в данной работе.

Собственные функции и спектр динамической системы

Линейная динамическая система описывается [1, 2] передаточной функцией $Q(p)$, линейным дифференциальным уравнением или интегральным уравнением свертки

$$y(t) = Qu(t) = \int_0^t q(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (1)$$

где $q(t)$ — импульсная весовая функция системы; $u(t)$, $y(t)$ — входной и выходной сигналы, рассматриваемые на конечном отрезке времени $0 \le t \le T$.

Интегральное представление (1) удобнее прочих в том отношении, что при замене интеграла суммой линейной динамической непрерывной системе ставится в соответствие некоторое ее матричное приближение $\mathbf{y} = \mathbf{Qu}$, где $\mathbf{Q}$ — теплицева матрица линейного оператора свертки (матрица теплицева оператора), теперь уже дискретной системы.

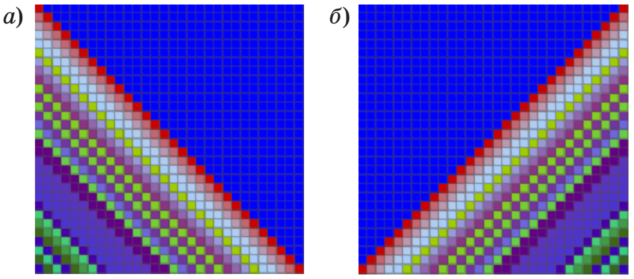
В частности, $\mathbf{Q}(i,\ j) = q(t - \tau)\Delta$ при $i \le j$, $t = \Delta i$, $\tau = \Delta j$, Δ — шаг дискретизации по времени. У всех каузальных (причинных) систем верхний правый треугольник коэффициентов матрицы нулевой, так как реакция не может предшествовать воздействию. Теплицева матрица $\mathbf{Q}$ несимметрична, ее собственные значения равны между собой и сосредоточены на диагонали.

Жорданов базис, помимо единственного собственного вектора, образует жорданова цепочка векторов, превалирующая в этом описании при увеличении порядка матрицы. В пределе, при повышении порядка матрицы до бесконечности, от собственного вектора остается одно воспоминание, его невозможно вычислить при бесконечной длине жордановой цепочки векторов.

Теплицева матрица $\mathbf{Q}$ связана с ганкелевыми матрицами $\mathbf{H}_1 = \mathbf{QF}$ или $\mathbf{H}_2 = \mathbf{FQ}$, где $\mathbf{F}$ — реверсная единичная матрица (флип-матрица). Пара $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{H}_1 = \mathbf{QF}$ изображены на рис. 1, *а* и *б*. Одинаковые значения элементов отражены одинаковым цветом клеток.

Ганкелева матрица (в отличие от связанной с ней теплицевой) симметрична, следовательно, собственные значения ее вещественны, а собственные векторы ортогональны. Весь ход наших упражнений описывает реверс вектора управления системы $\mathbf{y} = \mathbf{Qu}$, $\mathbf{u} = \mathbf{Fu^*}$ (договоримся вектор с реверсным порядком элементов помечать звездочкой).

Инверсия во времени дискретных или непрерывных входного и выходного сигналов — флип — линейная операция. С флипом на входе динамическая система по-прежнему линейна, вопрос рассмотрения очередности временных отсчетов вектора или сигнала (в прямом или реверсном порядке мы их принимаем) относится, скорее, к организационным, как именно мы вводим описание системы, чем к принципиально важным для отражения ее динамики.



■ ***Рис. 1.*** Матрицы теплицева $\mathbf{Q}$ (*а*) и ганкелева $\mathbf{H}_1$ (*б*)

В итоге реверса мы получаем вместо исходной линейную систему с ганкелевым оператором $\mathbf{y} = \mathbf{Hu^*}$, $\mathbf{H} = \mathbf{QF}$. Замена, происходящая столь просто, приводит к далеко идущим последствиям. Реверсировав во времени входной или выходной сигнал (т. е., изменив всего лишь точку зрения на то, как мы рассматриваем сигналы), мы получили взамен жорданова обычный ортогональный базис, который мы можем вычислять многими способами: численно — с помощью матриц, аналитически или натурным экспериментом.

Для непрерывной модели дискретный аргумент переходит в значения времени на отрезке T, такой «вектор» стоит именовать все же функцией. *Собственная функция* дополняет классические импульсную весовую или переходную функции, отражая специфику финитного времени.

Определение 1 (собственная функция). Не искажаемый системой $y(t) = \lambda u^*(t)$ входной сигнал $u^*(t) = u(T - t)$ назовем собственной функцией $f(t)$ линейной динамической системы.

Для большей простоты дальнейшего рассмотрения отметим, что с точностью до масштабного коэффициента λ собственная функция $f(t)$ фиксируется на выходе динамической системы, т. е. разделяет с ней ее нулевое начальное состояние. Часть характеристик ее, следовательно, нам заранее известны.

Для простоты определения мы не упомянули возможность инверсии выхода, а не входа. Парные собственные функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, отвечающие собственному значению λ двух ганкелевых операторов, описываемых (в дискретном случае) матрицами $\mathbf{H}_1 = \mathbf{QF}$ или $\mathbf{H}_2 = \mathbf{FQ}$, связаны условием зеркальной симметрии функций $f_1(t) = f_2(T - t)$. Глубокого различия между собой такие решения не имеют.

Термин «собственная функция» можно встретить в некоторых задачах теории обобщенных функций. В сочетании с приложением его к линейным непрерывным динамическим системам никакой путаницы не происходит.

Для линейных операторов в непрерывном случае спектр и собственные значения — это не одно и то же. К спектру линейного оператора H относят все нерегулярные значения λ резольвенты $H - \lambda E$, где E — тождественный оператор. Обратный к ней оператор может быть определен не на всем пространстве — это более широкая ситуация. Так, ограниченный в $L_2[0,\ T]$ оператор умножения функции на время $f(t) = tf(t)$ похож своим действием на матрицу с размещенными вдоль диагонали возрастающими «собственными значениями», но не имеет их по определению, поскольку мы исключили дельта-функции из рассмотрения.

Ситуация с исключением искусственная, регулируемая определениями, и в общем спектр может быть как точечным, так и непрерывным.

Часть его соответствует *собственным числам* λ, определяемым, как обычно, через уравнение $Hf = \lambda f$. Иными словами, различные трактовки спектра не мешают нам работать с *собственными функциями* — задача на *собственные значения* все равно обособляется.

Определение 2 (собственное значение). Коэффициент усиления λ сигнала в виде собственной функции назовем собственным значением линейной динамической системы.

Совокупность собственных значений называется дискретным спектром, упорядоченным по порядковым номерам или характерным частотам собственных функций. Порядковый номер в любом случае отвечает некоторой характерной частоте, поэтому без потери общности совокупность собственных значений λ спектра назовем *дискретной частотной характеристикой*.

Роль дискретных амплитудной (ДАЧХ) и фазовой (ДФЧХ) частотных характеристик при таком подходе играют модули и знаки собственных значений.

С равным успехом можно было бы ввести определения *сингулярных функций* и *сингулярных чисел* оператора свертки динамической системы, не прибегая к реверсу сигналов. В самом деле, в теории матриц существуют также сингулярные левый и правый векторы матрицы **Q**, определяемые через собственные векторы произведений $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ (пары Шмидта).

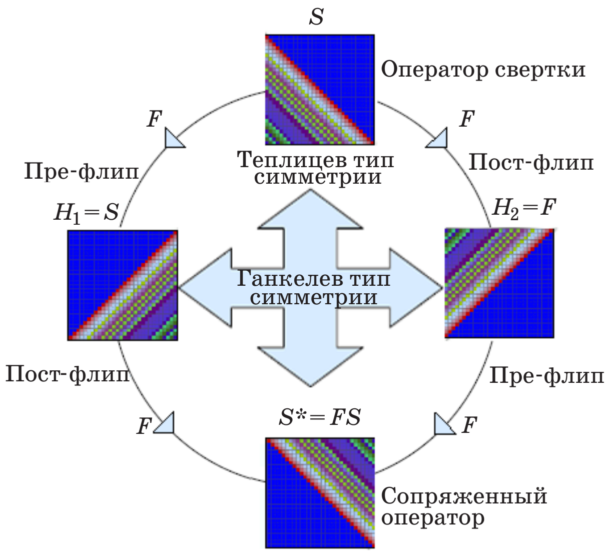
Для теплицевых структур общая картина с сингулярными и собственными векторами упрощается тем, что сингулярные векторы пар Шмидта являются собственными векторами двух ганкелевых матриц, обсуждаемых ранее. Тем самым выбор названия (собственный или сингулярный вектор, или функция) зависит от того, с каким именно линейным оператором мы его соотносим.

Численное нахождение ДЧХ

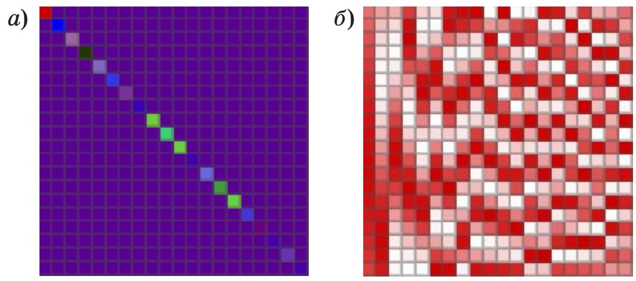
Численные методы имеют то преимущество, что они дают дискретный спектр элементарных звеньев посредством обращения к стандартной процедуре поиска собственных чисел и собственных векторов ганкелевой матрицы — в MatLab это функция eig(**H**). Некоторое представление о количестве возникающих в этой задаче операторов и виды соответствующих матриц дает рис. 2. В зависимости от того, что именно реверсируется во времени, входной или выходной сигналы, возникают две ганкелевы матрицы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$. Различия в спектре они не имеют, а их собственные векторы (функции соответствующих линейных операторов в непрерывном случае) зеркально симметричны.

Отметим, что в силу монотонности амплитудной частотной характеристики апериодического звена (и интегратора) его собственные функции, отвечающие убывающим по модулю собственным значениям, упорядочены по частоте, что несложно видеть по флуктуациям в колонках матрицы собственных векторов разложения $\mathbf{H} = \mathbf{SDS}^{-1}$, где **H** — ганкелева матрица; **D** — диагональная матрица собственных значений (рис. 3, *а*); **S** — ортогональная матрица колонок собственных векторов (рис. 3, *б*). Значения элементов отражены здесь цветом и степенью насыщенности цветов в колонках собственных векторов.

Разместив модули собственных значений λ (модули элементов диагональной матрицы **D**) на АЧХ, можно заметить связь частот соответствующих им собственных функций с частотами сигналов, аппроксимирующих элементы столбцов ортогональной матрицы **S**. Степень подробности дискретного описания линейной непрерывной динамической системы зависит от порядка ган-



■ ***Рис. 2.*** Теплицевы и ганкелевы матрицы операторов динамической системы



■ ***Рис. 3.*** Матрицы собственных чисел (*а*) и собственных векторов (*б*) келевой матрицы **H**, причем, главным образом, в области малых по модулю собственных значений. Максимальное по модулю собственное значение и соответствующая ему собственная функция называются *главными*.

Метод практичен, но не дает нам точного аналитического описания собственных функций, за исключением, как видно, простейших звеньев первого порядка или звеньев с монотонными частотными характеристиками, где всегда возможно определение базовой частоты собственной функции.

Аналитический метод нахождения ДЧХ

Гармонические сигналы. Теория динамических систем использует для описания базисных функций бесконечного интервала времени *круговые гармоники*, введенные еще Эйлером: $\sin(\omega t) = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2$, $\cos(\omega t) = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$.

Амплитудный коэффициент усиления, вычисленный с помощью модуля передаточной функции $Q(p)$, для них будет тем же самым, что и для составляющих их экспонент, поскольку функция $A(\omega) = |Q(j\omega)|$ симметрична.

Фазовый показатель комплексной функции $Q(j\omega)$ описывает сдвиг фазы выходного сигнала по отношению к входному.

Искомые составляющие полигармонических сигналов образованы, кроме случая круговых гармоник, парами экспонент, составляющих гиперболические функции $\mathrm{sh}(\alpha t) = (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t})/2$, $\mathrm{ch}(\alpha t) = (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})/2$ *мнимой частоты* α.

Наименование «мнимая частота» обязано своим происхождением возможности замены аргумента передаточной функции $Q(j\omega)$ мнимой величиной $\omega = -j\alpha$ для выяснения коэффициента усиления экспоненты.

Локализация частот. В теории автоматического управления существует тема *локализации* собственных значений матрицы системы пространства состояний, когда на комплексной плоскости указывается область их размещения (круги Гершгорина [2]).

То же самое относится к круговой и мнимой частотам, определяющим гармоники собственной функции; информация об их локализации облегчает нахождение собственных функций.

Напомним, что собственные функции ганкелева оператора H — это также сингулярные функции оператора свертки S, т. е. собственные функции оператора SS^*, где $S^* = FSF$ — сопряженный оператор; F — оператор флипа в непрерывном времени (см. рис. 2). В области передаточных функций инверсия сигнала во времени отвечает смене знака, поэтому квадраты амплитудных коэффициентов усиления описывает функция $R(p) = Q(p)Q(-p)$, $p = \alpha + j\omega$ — комплексный аргумент с компонентами в виде круговой и мнимых частот; модуль и мнимая часть ее для двойного интегратора показаны на рис. 4.

Классическая АЧХ динамической системы определяется функцией $A(\omega) = R(j\omega)^{1/2}$, т. е. срезом вдоль оси ω, мнимая часть $R(p)$ равна 0. Аналогичные срезы вдоль осей, например мнимой частоты α, отражают некоторую обобщенную АЧХ, описывающую коэффициенты усиления круговых и гиперболических гармоник, составляющих полигармонический сигнал (собственную функцию).

Неравенство $\mathrm{Re}(R(p)) \geq 0$, $p = \alpha + j\omega$, локализует круговую и мнимую частоты, справедливые для областей, где $\mathrm{Im}(R(p)) = 0$.

Передаточная функция флипа. Для аналитического исследования задачи на поиск ДЧХ, помимо передаточной функции системы $Q(p)$, нам потребуется передаточная функция $F(p)$, отвечающая операции реверса сигнала во времени.

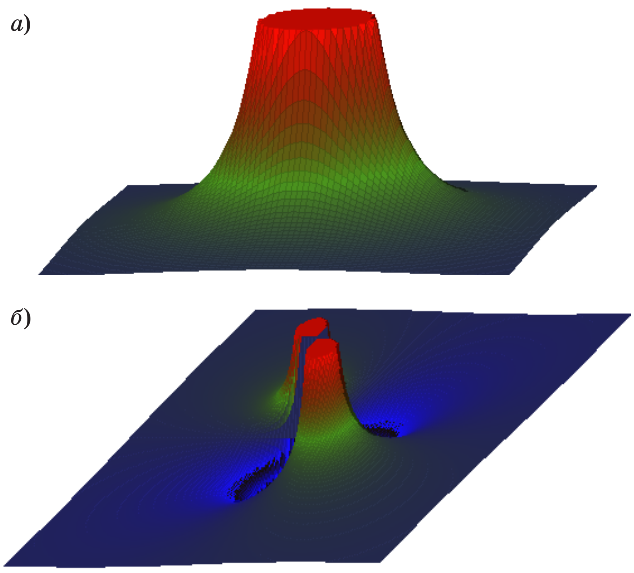
В матричном представлении флип описывается обратной единичной матрицей. Связанная с нею теплицева структура, единичная матрица, в непрерывном случае — элементарное звено, усилитель с передаточной функцией $Q(p) = 1$. Система с ганкелевой матрицей не каузальна (не причинна), и следовательно, флип — некоторая элементарная нестационарная линейная система.

Аппарат передаточных функций разработан для стационарных систем. Нестационарные системы принято описывать параметрическими передаточными функциями, зависящими от некоторого коэффициента.

Так, например, в методе Гольдфарба [1, 2] параметрическая передаточная функция линеаризуемого нелинейного элемента зависит от ампли-

а)

б)



■ ***Рис. 4.*** Модуль функции $R(p)$ (*а*) и ее мнимая часть (*б*) туды входного сигнала. В данном случае передаточная функция зависит от вида фазы гармоники.

Гармонический сигнал $u(t) = \sin(\omega t + \theta)$, подаваемый на вход флип-звена, остается гармоническим, не меняется по амплитуде.

Амплитудная характеристика передаточной функции флипа равна 1.

Вносимый реверсом сдвиг фазы выходного сигнала дает фазовую характеристику флипа, которая зависит от θ. Объединяя обе характеристики, получаем передаточную функцию флипа

$$F(p) = \mathrm{e}^{\psi(\omega,\theta)},\ \psi(\omega,\theta) = \pi - \omega T - 2\theta.$$

Для сигналов, описываемых гиперболическими функциями, получим сходный результат, но у гиперболического синуса при гармонике появляется знак, атрибут фазы, не переводимый в аддитивную добавку в виде π. Передаточные функции в методе Гольдфарба и в данном методе (назовем его *методом флипа*) упрощают анализ динамических систем, описываемых передаточными функциями.

Характеристическое уравнение. Характеристическое уравнение матрицы — это полином, корни которого дают ее собственные значения. Для непрерывной модели «матрица» системы бесконечномерная, ее характеристический полином — трансцендентное уравнение, корни которого определяют ее собственные значения (дискретный спектр), частоты и фазы собственной функции.

Характеристическое уравнение выводится из двух уравнений амплитудного и фазового балансов собственной функции $f(t) = SFf(t) = \lambda f(t)$ с учетом начальных условий, которые для собственных функций переходят в краевые.

1. Уравнение амплитудного баланса. У операции флипа амплитудная частотная характеристика единичная, поэтому уравнение амплитудного баланса имеет вид $A(\omega) = |\lambda|$, где $A(\omega)$ — амплитудная характеристика динамической системы; λ — собственное число. Точки ДЧХ расположены на АЧХ.

2. Уравнение фазового баланса. Оно учитывает сдвиг по фазе, вносимый флипом. Для круговых гармоник, например, имеем $\varphi(\omega) + \psi(\omega,\theta) = \arg(\lambda)$, где $\varphi(\omega)$ — фазовая характеристика системы; $\psi(\omega,\theta)$ — фазовая частотная характеристика флипа: $\psi(\omega,\psi) = \pi - \omega L - 2\theta$, $\arg(\lambda) = 0$, если $\lambda \ge 0$, и $\arg(\lambda) = \pi$ при отрицательном λ.

Подставляя в уравнение фазового баланса часто́ты, удовлетворяющие уравнению амплитудного баланса, получаем зависимость фаз гармоник $\theta(\lambda)$ полигармонического сигнала (собственной функции) от собственных значений.

3. Учет двух уравнений в сочетании с начальными условиями ведет к *характеристическому уравнению* (или уравнениям) $\chi(\omega(\lambda), \theta(\lambda)) = 0$.

Пусть $f(t) = C_1\sin(\omega_1 t + \theta_1) + C_2\sin(\omega_2 t + \theta_2) + \ldots + C_n\sin(\omega_n t + \theta_n)$.

Начальные условия выливаются в краевые для собственной функции, так как сигнал на входе динамического звена $u^* = f(T - \tau)$ связан с выходным сигналом $y(t) = \lambda f(t)$. Отсюда $f(0) = 0$, $\lambda f'(0) = q(0)f(T)$, $\lambda f''(0) = q'(0)f(T) - q(0)f'(T)$ и т. п., где $q(0)$, $q'(0)$, ... — значения импульсной весовой функции системы и ее производных.

Для *инерционных систем* второго порядка ($q(0) = 0$) имеем $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

В свою очередь из равенства нулю производной $f'(0) = 0$ (гладкий старт) для систем второго порядка получаем трансцендентное характеристическое уравнение $\omega_1\mathrm{ctg}(\theta_1) - \omega_2\mathrm{ctg}(\theta_2) = 0$, которое можно выразить как уравнение относительно искомого собственного значения λ после подстановки в него зависимостей $\omega(\lambda)$ и $\theta(\lambda)$, следующих из уравнений амплитудного и фазового балансов. Из равенства нулю самой функции $f(0) = 0$ следует, что независимо от параметров инерционной динамической системы второго порядка ее собственная функция в случае круговых гармоник имеет вид $f(t) = \sin(\theta_2)\sin(\omega_1 t + \theta_1) - \sin(\theta_1)\sin(\omega_2 t + \theta_2)$.

ДЧХ апериодического звена и интегратора

Для систем первого порядка с передаточной функцией $Q(p) = \dfrac{1}{p+b}$ задача определения ее ДЧХ — тривиальная в том смысле, что она не имеет таких особенностей, как суммирование гармоник и ведущая частота.

Приступим к локализации частот. Модуль функции $R(p) = -1/p^2$ интегратора, рассматриваемый на комплексной плоскости аргумента, имеет полюс в нулевой точке (см. рис. 4, *а*). Квадрат $p^2 = \alpha^2 + 2j\alpha\omega - \omega^2$, поэтому вещественные значения $R(p)$ приходятся на одной из осей аргумента, когда либо $\alpha = 0$, либо $\omega = 0$, за их пределами мнимая часть отлична от нуля (см. рис. 4, *б*). Кроме того, необходимо, чтобы $\mathrm{Re}(R(p)) \ge 0$, соответственно, для собственных функций интегратора (и устойчивого апериодического звена, если проверить) частот ω классической оси аргументов АЧХ вполне достаточно. Собственные функции интегратора и апериодического звена — синусоиды: $f(t) = \sin(\omega t)$.

Краевые условия дают *характеристическое уравнение* $\mathrm{tg}(\omega T) + \omega/b = 0$, которое с учетом подстановки $\omega = (1/\lambda^2 - b^2)^{1/2}$ переходит в уравнение относительно искомого собственного значения λ. Частоты собственных функций интегратора $\omega_k = (1/2 + k)\pi/T$, $k = 0, 1, \ldots$, соответственно: $\lambda_k = \pm 1/\omega_k$, главная собственная функция $f(t) = \sin(\pi t/2T)$ отвечает по форме четверти синусоиды на любом отрезке времени T.

Вторая ось частот α графика гиперболических гармоник актуальна для неустойчивого звена.

Неустойчивая система с $b < 0$ на отрезке $T > b$, помимо синусоидальных младших, имеет одну главную гиперболическую собственную функцию $f(t) = \mathrm{sh}(\alpha t)$, значение частоты $\alpha = (b^2 - 1/\lambda^2)^{1/2}$ берется на обобщенной частотной амплитудной характеристике, вариант неоднозначности с $\alpha > |b|$ исключен условиями локализации частот. Звено не имеет характерных для прочих случаев парных частот, порождающих биения, это вырожденная задача, с особенностями только при неустойчивости.

ДЧХ двойного интегратора

Собственные функции двойного интегратора $Q(p) = \dfrac{1}{p^2}$, как и собственные функции консервативного звена (для малых коэффициентов усиления), построены на паре гармоник, коэффициенты усиления которых берутся на срезе $A(\omega) = R(j\omega)^{1/2}$ и его продолжении $A(\alpha) = R(\alpha)^{1/2}$ вдоль осей ω и α, причем для двойного интегратора, ввиду положения полюса в точке 0, имеем симметричное решение $\alpha = \omega$.

Таким образом, согласно условиям локализации собственная функция содержит взвешенные суммы круговых и гиперболических гармоник $f(t) = \sin(\omega t) - \mathrm{sh}(\omega t) - \eta(\cos(\omega t) - \mathrm{ch}(\omega t))$, где $\eta = (\sin(\omega T) + \mathrm{sh}(\omega T))/(\cos(\omega T) + \mathrm{ch}(\omega T)))$, выражение получено с учетом двух начальных $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и одного краевого $\lambda f''(T) = u(T) = 0$ условий.

Второе краевое условие $\lambda f''(0) = u(0) = f(T)$ дает *характеристическое уравнение* двойного интегратора $\sin(\omega T) - \mathrm{sh}(\omega T) - (\cos(\omega T) - \mathrm{ch}(\omega T))\eta \pm$ $\pm\, 2\eta = 0$, определяющее частоты, на которых реализуются коэффициенты усиления $\lambda = \pm 1/\omega^2$.

Двойной интегратор — это звено относительно несложное, сходное с интегратором местом расположения полюсов. Круговая гармоника двойного интегратора, в сравнении с одинарным интегратором, смещена на $\theta = -\pi/2$, это дает приближенную оценку вида собственной функции, отвечающей нулевым начальным условиям: $f(t) = \sin(\omega t + \theta) -$ $- \sin(\theta) = 1 - \cos(\omega t)$, $\omega = 0{,}6*\pi/T$. Главная собственная функция одинарного интегратора — четверть синусоиды, тут период и того меньше (по форме почти острый треугольник).

Сходные приближенные оценки касаются прочих кратных интеграторов.

ДЧХ консервативного звена

Звено с передаточной функцией $Q(p) = \dfrac{1}{p^2 + 1}$ иллюстрирует основные особенности систем с резонансами.

Модуль функции $R(p) = Q(p)Q(-p)$ имеет вид, сходный с тем, что изображен на рис. 4, но полюс отвечает аргументу $p = j$, т. е. значению частоты $\omega = 1$. Соответственно, амплитудная характеристика $A(\omega) = R(j\omega)^{1/2}$ имеет два склона, по двум сторонам от полюса, и условие амплитудного баланса $A(\omega) = |\lambda|$ выделяет на склонах две точки $\omega_1 = (1 - 1/\lambda)^{1/2}$, $\omega_2 = (1 + 1/\lambda)^{1/2}$.

Такие характерные парные частоты, порождающие у сумм гармонических сигналов биения, рассматриваемые как собственные функции, вместо обычных гармоник, добавляет любой полюс, — это общая черта консервативных звеньев.

Уравнение фазового баланса учитывает сдвиг по фазе $\psi(\omega,\theta) = \pi - \omega T - 2\theta$, вносимый оператором флипа $\varphi(\omega) + \psi(\omega,\theta) = \arg(\lambda)$, $\arg(\lambda) = 0$, если $\lambda \geq 0$, и $\arg(\lambda) = \pi$ при отрицательном λ, $\varphi(\omega) = \arg(1 - \omega)$ — фазовая характеристика колебательного звена, причем $\varphi(\omega_1) = 0$, $\varphi(\omega_2) = \pi$.

Отсюда получим фазы гармоник $\theta_1 = (\pi - \omega_1 T)/2$, $\theta_2 = -\omega_2 T/2$.

Это звено инерционное, импульсная весовая функция и ее производная в начальной точке равны 0. Из краевых условий следует уравнение $\omega_1 \mathrm{ctg}(\theta_1) - \omega_2 \mathrm{ctg}(\theta_2) = 0$. Подстановкой в него фаз получаем трансцендентное характеристическое уравнение $\omega_1 \mathrm{tg}(\omega_1 T/2) + \omega_2 \mathrm{ctg}(\omega_2 T/2) = 0$, которое с учетом формул для ω_1, ω_2 становится характеристическим: $\chi(\lambda) = 0$.

Как видно, «матрица» линейного оператора этого звена бесконечномерная, тем не менее, опираясь на передаточные функции звена и флипа, мы сумели построить ее «характеристический многочлен».

Семейство собственных функций бесконечно, в первую очередь, нас интересует *главная собственная функция*, отвечающая максимальному по модулю собственному числу вида $f(t) =$ $= \sin(\theta_2)\sin(\omega_1 t + \theta_1) - \sin(\theta_1)\sin(\omega_2 t + \theta_2)$.

Младшие собственные функции, отвечающие коэффициентам усиления, меньшим 1, включают гиперболические составляющие $f(t) = \alpha_1 \sin(\omega_2 t) -$ $- \omega \mathrm{sh}(\alpha_1 t) - \eta(\alpha_1 \cos(\omega_2 t) - \omega_2 \mathrm{ch}(\alpha_1 t))$, которые мы видим также у двойного интегратора. Происхождение их сходное, для малых коэффициентов усиления монотонно убывающей правой ветви АЧХ $A(\omega) = R(j\omega)^{1/2}$ отвечает ветвь обобщенной АЧХ $A(\alpha) = R(\alpha)^{1/2}$. Точки обобщенной АЧХ на уровне $A(\alpha) = A(\omega) = |\lambda|$ порождают парные частоты α_1, ω_2 круговой и гиперболической гармоник.

Натурный эксперимент

Помимо способов нахождения в соответствующим образом организованных натурных экспериментах амплитудно-частотной и фазовых характеристик, импульсной весовой и переходных функций, существуют также способы нахождения характеристик ДЧХ [3, 9, 11, 12].

Обратимся к известным в теории матриц итерационным процедурам нахождения главного собственного вектора. Если матрицу умножить сначала на произвольный вектор, а потом, итерационно, умножать итог произведения, то главный собственный вектор, отвечающий максимальному собственному числу, будет входить в результат все с большим и большим весом, в итоге он и будет превалировать в решении.

Следующий эксперимент назовем натурным *ганкелевым экспериментом* [9].

На первом этапе на систему подается произвольный, допустим, ступенчатый сигнал. Реверсировав во времени реакцию, подадим ее на систему снова, обнулив ее начальные условия. Образуется кольцо с передачей сигнала от входа к выходу. Для того чтобы сигнал не рос или не уменьшался существенно по амплитуде, нормируем входной сигнал перед подачей его на систему.

Отличительным признаком успешного завершения итераций для динамических систем в соответствии с определением собственного вектора является совпадение по форме реверсированного входного и выходного сигналов. Такой натурный эксперимент отличается характерными для него деталями от способов измерения частотных характеристик, он дает возможность измерить интересующее нас главное собственное значение и собственную функцию, т. е. модель системы, дополняющую импульсную весовую функцию или частотную характеристику.

Заключение

Оператор свертки собственных функций не имеет — линейная непрерывная динамическая система не повторяет (без искажения формы) входной сигнал. По этой причине собственные функции динамических систем на бесконечном интервале времени (в традиционной сфере приложения частотных характеристик) не рассматривались. Линейные динамические системы финитного времени порождают ортогональный собственный базис.

Собственные числа и собственные функции бесконечномерных объектов имеют много общего с собственными числами и собственными векторами матриц. Характеристический полином матрицы переходит в трансцендентный, в статье указан метод его построения.

Масштабированием производных $f'(0) = q(0)$ не инерционных систем (начальный наклон пропорционален начальному значению импульсной весовой функции) можно получить интересный результат, состоящий в том, что завершения собственных функций «заметают» $f(T) = \lambda$ спектр. Сходное качество собственных векторов иметь в качестве компонент собственные числа наблюдается у матриц Вандермонда.

Жорданов базис матриц тоже имеет продолжение. Например, импульс и импульсная весовая функция или ступенчатый входной сигнал и переходная функция — это описание линейной динамической системы элементами цепочки жорданового базиса. В самом деле, в предположении нулевого собственного значения при малосущественном собственном векторе пара соседних элементов жордановой цепочки связаны, по их определению, как вход и выход системы.

На ограниченном интервале времени появляется выбор: можно пользоваться либо жордановым, либо собственным базисом. Главная собственная функция представляет собой описание линейной динамической системы, более подробное и точное. Так, амплитудных значений АЧХ никогда не достичь при ограничении времени, достигается только верхнее значение коэффициента усиления, описываемое главным собственным числом.

При разнесении отрезков времени управления и реакции большинство собственных значений убывает до нуля, ненулевые составляющие спектра ограничены порядком передаточной функции динамической системы [10]. Это свойство используется, например, для редукции, поскольку собственные значения (ганкелевы числа) трактуются как сингулярные числа ассоциированного с динамической системой линейного оператора.

В структурах теплицевой и ганкелевой матриц просматривается связь с теорией обобщенных матриц Адамара, рассматриваемых, например, в работе [13]. Синтез регуляторов — традиционное для использования частотных характеристик направление. Собственными значениями бесконечномерных матриц так же, как и собственными значениями матриц описания системы в пространстве состояний [14], можно управлять, синтезируя системы с желаемыми ДЧХ. Программное обеспечение линейных динамических систем финитного времени используется в математической сети http://mathscinet.ru/systems/finitetime, см. [15, 16].

Автор выражает глубокую благодарность своим учителям, авторам учебников В. А. Бесекерскому, А. А. Вавилову, А. А. Воронову, Н. С. Зотову, Д. Х. Имаеву, Г. В. Кореневу, И. А. Орурку, О. С. Попову, Э. П. Чернышову, В. Б. Яковлеву.

Литература

1. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия, 2003. — 772 с.
2. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. — М.: Энергия, 1980. — 312 с.

3. **Балонин Н. А.** Компьютерные методы анализа линейных динамических систем: дисс. д-ра техн. наук. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. — 400 с.
4. **Finite** Time Interval Dynamic Systems. http://mathscinet.ru/systems/finitetime/ (дата обращения: 05.11.2014).
5. **Балонин Н. А.** Сингулярные функции линейных динамических систем. — Lambert Academic Publishing, 2011. — 112 с.
6. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 6. С. 3–22.
7. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Компьютерные модели линейных операторов динамической системы // Информационно-управляющие системы. 2002. № 1. С. 24–28.
8. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Линейные операторы динамической системы // Автоматика и Телемеханика. 2000. № 11. С. 57–68.
9. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Флип-метод определения сингулярных функций Ганкелева оператора и оператора свертки // Автоматика и Телемеханика. 1999. № 11. С. 3–18.
10. **Glover K.** All Optimal Hankel-norm Approximations of Linear Multivariables Systems // Intern. J. Control. 1984. Vol. 39. N 6. P. 1115–1193.
11. **Балонин Н. А.** Новый курс теории управления движением. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. — 160 с.
12. **Балонин Н. А.** Теоремы идентифицируемости. — СПб.: Политехника, 2010. — 48 с.
13. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2–15.
14. **Балонин Н. А., Суздаль В. С., Козьмин Ю. С.** Модальное управление в системах кристаллизации // Проблемы управления и информатики. Журнал Института кибернетики и Института космических исследований. 2014. № 4. С. 96–101.
15. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Концепция электронного журнала с исполняемыми алгоритмами // Фундаментальные исследования. 2013. № 4 (часть 4). С. 791–795.
16. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Марлей В. Е.** Новые возможности математической сети для коллективных исследований и моделирования в Интернет // Информационно-управляющие системы. 2014. № 3(70). С. 40–46.

UDC 519.715:614
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.17

Discrete Frequency Characteristics of Elementary Dynamic Units

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The theory of dynamic systems does not make difference between continuous and discrete frequency characteristics as the signal theory does. The purpose of this research is eliminating this shortcoming by introducing finite time into discrete frequency response of linear dynamic systems, with an example of elementary units of the first and second order. **Results:** The difference is shown between frequency characteristics of signals/systems which are continuous in infinite time range and discrete in a limited time interval. A definition is given for discrete frequency characteristics of linear dynamical systems in finite time. Numerical and analytical methods are discussed for finding them, along with a field experiment method. A transfer function is derived for a non-stationary linear unit of the flip operator (reverse signal in time). Characteristics of elementary units of the first and second order are given, described by transfer functions of the integrator, double integrator, aperiodic and conservative links. It is shown that the points of their discrete frequency characteristics are located on the amplitude frequency characteristics of the units. **Practical relevance:** The discrete frequency characteristics complement the classical continuous ones, being consistent with their amplitudes and making them more accurate, taking into account an important practical factor which is the limited time of the processes. An appropriate software is developed for mathematical Internet.

Keywords — Dynamic Systems, Finite Systems, Frequency Characteristics, Continuous Spectrum, Discrete Spectrum, Elementary Units.

References

1. Besekerskij V. A., Popov E. P. *Teoriia sistem avtomaticheskogo upravleniia* [The Theory of Automatic Control Systems]. Saint-Petersburg, Professiia Publ., 2003. 772 p. (In Russian).
2. Voronov A. A. *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniia: Avtomaticheskoe regulirovanie nepreryvnykh lineinykh sistem* [Fundamentals of the Theory of Automatic Control: Automatic Regulation of Continuous Linear Systems]. Moscow, Energiia Publ., 1980. 312 p. (In Russian).
3. Balonin N. A. *Komp'yuternye metody analiza lineynykh dinamicheskikh system*. Dis. dokt. tekhn. nauk [Computer Methods for Analysis of Linear Dynamical Systems. Dr. tehn. sci. diss.]. Saint-Petersburg, SPbGU Publ., 2008. 400 p. (In Russian).
4. *Finite Time Interval Dynamic Systems*. Available at: http://mathscinet.ru/systems/finitetime/ (accessed 5 November 2014).
5. Balonin N. A. *Singuliarnye funktsii lineinykh dinamicheskikh sistem* [Singular Functions of Linear Dynamical Systems]. Lambert Academic Publishing, 2011, 112 p. (In Russian).
6. Balonin N. A., Mironovskii L. A. Spectral Characteristics of the Linear Systems over a Bounded Time Interval. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2002, no. 6, pp. 3–22 (In Russian).

7. Balonin N. A., Mironovsky L. A. Computer Models of Dynamic System Linear Operators. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2002, no. 1, pp. 24–28 (In Russian).
8. Balonin N. A., Mironovskii L. A. Linear Operators of a Dynamical System. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2000, no. 11, pp. 57–68 (In Russian).
9. Balonin N. A., Mironovskii L. A. The Flip Method for Determining Singular Functions of the Hankel Operator and the Convolution Operator. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1999, no. 11, pp. 3–18 (In Russian).
10. Glover K. All Optimal Hankel-Norm Approximations of Linear Multivariables Systems. *Intern. J. Control*, 1984, vol. 39, no. 6, pp. 1115–1193.
11. Balonin N. A. *Novyi kurs teorii upravleniia dvizheniem* [New Course the Theory of Motion Control]. Saint-Petersburg, SPbGU Publ., 2000. 160 p. (In Russian).
12. Balonin N. A. *Teoremy identifitsiruemosti* [Identifiability Theorems]. Saint-Petersburg, Politekhnika Publ., 2010. 48 p. (In Russian).
13. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local Maximum Determinant Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1(68), pp. 2–15 (In Russian).
14. Balonin N. A., Suzdal' V. S., Koz'min Yu. S. Modal Control for Systems of Crystallization. *Problemy upravleniya i informatiki*, Institut kibernetiki i Institut kosmicheskikh issledovaniy Publ., 2014, no. 4, pp. 96–101 (In Russian).
15. Balonin N. A., Sergeev M. B. The Concept of Electronic Magazine with Executable Algorithms. *Fundamental'nye issledovaniya*, 2013, vol. 4, no. 4, pp. 791–795 (In Russian).
16. Balonin N. A., Marley V. E., Sergeev M. B. New Opportunities of a Mathematical Network for Collective Research and Modeling in the Internet. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 3(70), pp. 40–46 (In Russian).