УДК 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.6.2

О ЗНАЧЕНИИ МАТРИЦ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В АЛГОРИТМЕ ПОИСКА ОБОБЩЕННЫХ ВЗВЕШЕННЫХ МАТРИЦ ГЛОБАЛЬНОГО И ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ДЕТЕРМИНАНТА

Н. А. Балонин[a], *доктор техн. наук, профессор*
М. Б. Сергеев[a], *доктор техн. наук, профессор*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Цель: *показать значение матриц начального приближения, задающих структуру в задачах поиска ортогональных многоуровневых матриц глобального и локального максимумов детерминанта.* ***Методы:*** *поиск матриц глобального и локального максимумов детерминанта ведется итерационной вычислительной процедурой, ориентированной на минимизацию максимального абсолютного значения элементов ортогональной матрицы с предвычислением ее начального приближения в заданной априори структурированной форме.* ***Результаты:*** *предложенный подход, учитывающий на начальном этапе вычислений структуру и симметрию, существенно повышает эффективность поиска ортогональных по строкам (столбцам) обобщенных взвешенных матриц. Показана целесообразность учета как явной, так и неявных симметрий матриц. Приведены примеры скрытых симметрий матриц и указаны связанные с ними преобразования, эквивалентные по отношению к значению детерминанта матрицы.* ***Практическая значимость:*** *обобщенные взвешенные матрицы глобального и локального максимумов детерминанта ортогональны и имеют практическое значение в решении задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеоинформации.*

Ключевые слова *— вычислительные методы, ортогональные матрицы, взвешенные матрицы, адамаровы матрицы, циклические матрицы, негациклические матрицы, бициклические матрицы.*

Введение

Численные методы линейной алгебры обобщают обширный опыт вычислений с применением компьютеров, освещенный в научной литературе и справочниках. Среди книг можно отметить выдержавшую не одно издание книгу Д. К. Фаддеева и В. Н. Фаддеевой [1], а также систематизированный обзор вычислительных методов В. В. Воеводина и Ю. А. Кузнецова [2]. Классическими также стали труды Ф. Р. Гантмахера, Р. Беллмана, П. Ланкастера, Р. Хорна и Ч. Джонсона, Дж. Голуба и Ч. Ван Луана, А. А. Самарского, И. С. Березина и Н. П. Жидкова, Дж. Райса и многих других авторов. Из новых опубликованы, например, работы Е. Е. Тарышникова [3] и С. П. Шарого [4].

В вычислительной математике можно выделить два сложившихся крупных направления. Во-первых, это решение систем линейных алгебраических уравнений и всего, что с ними связано: использование симметрий, вычисление показателей обусловленности, методы регуляризации плохо обусловленных задач, вопросы разложения матриц коэффициентов, распараллеливания вычислений и др. Во-вторых — решение общей алгебраической проблемы поиска собственных значений, также вмещающее в себя немало разветвлений.

Вычисление детерминанта реализуется в рамках обоих этих направлений [1–5], и открыть для него еще один численный метод кажется затруднительным. Вместе с тем оптимизация детерминанта матрицы варьированием значений ее элементов — задача иная и заведомо более сложная. Особенно, если матрица должна удовлетворять некоторым дополнительным уравнениям связи. Классические подходы к оптимизации функций нескольких аргументов здесь практически бесполезны, поскольку число аргументов — элементов матрицы — находится в квадратичной зависимости от ее порядка.

Цель настоящей статьи — осветить новый опыт авторов, работающих над решением задачи вычисления матриц глобального или локального максимумов детерминанта [5–7].

Постановка задачи и возможные решения

Рассматриваемая задача имеет простую постановку: требуется найти квадратную матрицу $\mathbf{A}$ порядка n, определенную над полем вещественных чисел, обладающую глобальным или локальным максимумом модуля детерминанта $\det(\mathbf{A})$ при ограничениях на абсолютные значения величин ее элементов в виде $|a_{ij}| \le 1$ и наличии квадратичного уравнения связи $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \omega(n)\mathbf{I}$, где $\omega(n)$ — некоторая весовая функция, определяющая тип матрицы, а $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

В указанном виде задача была сформулирована в работе [5], в которой систематизированы весовые функции наиболее значимых, с нашей точки зрения, вариантов решений, приведенных в таблице и рассмотренных подробно в работах [6, 7]. Для весовой функции $\omega(n) = n$ задача впервые была поставлена в работе [8], породив поиск и исследование матриц Адамара и матриц абсолютного максимума детерминанта (D-матриц) при отсутствии указанного квадратичного ограничения. В таблице t и k — целые числа, определяющие порядки соответствующих матриц и их весовые функции, а s и d — элементы каймы и диагонали соответственно.

В постановке Адамара наиболее существенно то, что ввиду целочисленного значения весовой функции решение — матрица оптимума — также целочисленная с элементами 1 и –1. Адамар установил [8], что экстремальные матрицы существуют для порядков $n = 1$, $n = 2$ и всех четных значений $n = 4t$. Следует заметить, что требование целочисленности решения вполне искусственное, оно не следует из существа задачи, а отражает интерес Адамара к квадратным матрицам Сильвестра с ортогональными столбцами и элементами 1 и –1.

Объяснение сложившейся позднее практики поиска целочисленных решений состоит в том, что вычислительные машины прошлого были относительно маломощны. Ортогональные последовательности (функции Уолша), порождаемые матрицами Адамара и состоящие из элементов 1 и –1, рассматривались как предпочтительные при программной реализации вычислений с ними. Для вычислений на современных процессорах такие ограничения не являются существенными.

Близкая к постановке Адамара задача впервые рассматривалась в работе [17], где, вопреки сложившимся традициям, было введено понятие матриц Адамара нечетных порядков, а элементы искомой оптимальной по детерминанту матрицы заданы диапазоном их значений $|a_{ij}| \le 1$.

В работе [17] нет еще понятия весовой функции $\omega(n)$. Множитель единичной матрицы не задан жестко и служит объектом определения, как и у Адамара, обнаружившего, что для интересующих его вариантов решений $\omega(n) = n$. Для нечетных значений порядков эта функция иная и задана в работе [17] таблично для пяти стартовых нечетных порядков 3, 5, 7, 9, 11. При этом и веса, и элементы искомых матриц могут быть рациональными и иррациональными и иметь два или более значений — уровней [5, 18].

В работе [19] было обнаружено критичное значение нечетного порядка $n = 13$, после которого задача в принципе не разрешима на классах матриц с малым количеством отличных между собой элементов. В случаях, отмеченных Адамаром, значений элементов матрицы всего два. При нечетных значениях порядка число различных модулей элементов (модульных уровней)

■ Весовые функции наиболее значимых вариантов решений

Порядок матрицы n	Матрица	Возможные значения элементов матрицы	Функция веса $\omega(n)$	Литература
$4t$	Адамара	1, –1	n	[8]
$2t$, $4t$	Белевича	1, –1, 0	$n - 1$	[9]
t, $2t$, $3t$, $4t$	Взвешенная (Тоски — Себерри)	1, –1, 0	$n - k$	[10, 11]
$4t - 1$	Мерсенна	1, $-b$, где $b = \dfrac{t}{t + \sqrt{t}}$	$((n+1) + (n-1)b^2)/2 =$ $= 2t + (2t-1)b^2$	[12, 13]
$4t - 2$	Эйлера*	1, $-b$, где $b = \dfrac{t}{t + \sqrt{2t}}$	$((n+2) + (n-2)b^2)/2 =$ $= 2t + (2t-2)b^2$	[14]
$4t - 3$	Зейделя	1, $-b$, d, где $b = 1 - 2d$, $d = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$	$(n-1)(1+b^2)/2 + d^2 =$ $= 2(t-1)(1+b^2) + d^2$	[5, 15]
$4t - 3$	Ферма	1, $-b$, s, где $q = n - 1 = 4u^2$, $p = q + \sqrt{q}$, $b = \dfrac{2n-p}{p} = 1 - \dfrac{2u-1}{2u+1} \times \dfrac{1}{u}$, $s = \dfrac{\sqrt{nq - 2\sqrt{q}}}{p} = \dfrac{\sqrt{nu-1}}{2u+1} \times \dfrac{1}{\sqrt{u}}$	$1 + 4u^2s^2 = k + (q-k)b^2 + s^2$, где $k = \dfrac{q - \sqrt{q}}{2} = 2u^2 - u$	[16]

* Для матрицы Эйлера четного порядка указаны значения двух ее блоков [6], в данном случае возможна инверсия знаков элементов сменой знака каждого из блоков.

матриц растет незначительно, почти линейно, но только до порядка 11 [18, 19]. Сходный проблемный порядок $n = 15$ исследован для D-матриц с бинарными элементами 1, –1 в работе [20], а уже при $n = 22$ точное решение неизвестно.

Мощность современных компьютеров недостаточна для нахождения оптимальной матрицы прямым перебором даже при столь узком ограничении, как бинарные значения элементов. Выделение весовых функций матриц локальных максимумов детерминанта позволяет сформулировать и реализовать алгоритм их поиска [5, 8, 19]. В настоящее время накоплен значительный опыт применения базового алгоритма [21], существенно изменивший точку зрения на его построение.

Базовый алгоритм и его недостатки

При разработке вычислительной схемы базового алгоритма в работах [5, 19] авторами недооценивалось значение *матрицы начального приближения*. Результаты вычислительных экспериментов показали [21], что для эффективности поиска матрица начального приближения должна нести некоторую существенную информацию о структуре искомой матрицы. Базовый алгоритм — это алгоритм второй стадии, корректирующий ошибки матрицы, вычисленной на первой стадии вычислительного процесса. Такая возможность игнорировалась в работе [19] в пользу матрицы оператора гильбертова преобразования, служившей источником первых полученных нами решений. Для матриц больших порядков и матриц локального максимума детерминанта [5] такая стратегия (выбор пусть хорошей, но одной стартовой матрицы) оказалась малоэффективной. Кроме выбора стартовой матрицы, необходимо организовать последующие вычисления так, чтобы они не разрушали предложенную структуру.

Такой подход противоречит введенной в работах [5, 19] перестановке столбцов искомой матрицы для повышения чувствительности процесса ортогонализации по методу Грамма — Шмидта [1, 2]. В программном комплексе [21] это противоречие было снято сохранением информации о перестановках и последующим реверсным восстановлением структуры матрицы по завершении вычислений. Произведенная вычислениями коррекция может быть как успешной, так и неуспешной. В последнем случае для эффективности поиска немаловажно распределение вычислительных затрат (максимального количества разрешенных итераций) между двумя стадиями выполнения алгоритма: выбором начального приближения и коррекцией ошибок начального приближения.

Неоправданная затянутость либо первой, либо второй стадии вычислений негативно влияет на результативность поиска, что определяет важность рассмотрения этого вопроса.

Изменение вычислительной схемы алгоритма

В соответствии с вышеизложенными обстоятельствами опишем вычислительную схему обновленной версии алгоритма поиска матриц глобального и локального максимума детерминанта.

Стадия 1. Матричный генератор, целью работы которого является формирование матрицы начального приближения одной из следующих форм:

— циклической;
— бициклической;
— негациклической;
— бинегациклической;
— массива Вильямсона из четырех циклических или негациклических клеток;
— k-циклических или k-негациклических матриц с одинарной или двойной каймой.

Перечисленные формы привычны при поиске ортогональных матриц Адамара на порядках $n = 4k$, обладающих глобальным максимумом детерминанта. Кроме того, это могут быть квазиортогональные матрицы порядков, отличных от адамаровых [5–7], структуры которых закладываются на стадии 1.

Матричный генератор формирует не одну матрицу начального приближения, как ранее в работах [5, 17], а множество матриц, обозначаемых как $\mathbf{A}$. Матрицы сравниваемы между собой по квадратичной невязке $\xi = \|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \omega(n)\mathbf{I}\|$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица; $\omega(n)$ — функция веса, зависящая от порядка n матрицы (см. функции веса в таблице и работах [6, 7]). Оценка качества матриц, связанных условием ортогональности их столбцов (строк), вполне естественна. Однако такие матрицы могут быть сколь угодно далеки от искомых оптимальных. Результат работы матричного генератора — множество матриц начального приближения заданной формы, из которых выбирается одна лучшая по квадратичной невязке, обозначаемая далее как стартовое приближение $\mathbf{A}_0$.

На генерацию матриц и выбор матрицы начального приближения отводится время, измеряемое, например, количеством циклов N_1 рандомизированного поиска. Безотносительно к алгоритму подготовки, в итерациях стадии 2 используются матрицы с нормированными столбцами (квадратичная норма каждого столбца матрицы $\mathbf{A}_0$ равна 1).

Стадия 2. Ее основа — базовый алгоритм, описанный в работах [5, 17] и дополненный описываемыми далее процедурами. Реализация данной стадии начинается с этапа инициализации вектора $\mathbf{X}_0 = [0, 1, 2,..., n-1]$ номеров реверсной перестановки столбцов. Для удобства программной реализации полагаем, что индексы столбцов нумеруются, начиная с нуля.

В общем вектор перестановок $\mathbf{X}_k$, например, может быть реализован как нижняя строка искомой матрицы $\mathbf{A}_k$, k — номер итерации, состоящей в выполнении указанных ниже процедур.

Процедура 1. Перестановка столбцов итерируемой матрицы $\mathbf{A}_k$ и элементов вектора реверсной перестановки $\mathbf{X}_k$ в порядке убывания абсолютных значений максимальных элементов в столбцах. Благодаря сохраненной в векторе $\mathbf{X}_k$ информации о всех перестановках при повторении процедуры на заключительном этапе итераций сохраняется возможность осуществить реверсный ход.

Процедура 2. Сжатие матрицы, т. е. ограничение норм элементов матрицы насыщением.

Пусть m — значение максимального по абсолютной величине элемента матрицы после предыдущей итерации. Абсолютные значения всех элементов матрицы понижаются (с сохранением их знаков) до величины $p_k m$, где $p_k \le 1$.

Заметим, что ограничивать норму элементов матрицы можно как сверху, так и снизу, в зависимости от основной стратегии конкретной реализации.

Процедура 3. Стартовое значение p_0 масштабного множителя функции насыщения назовем *коэффициентом начального сжатия*.

Значение указанного коэффициента на старте задается (обычно) как 0,5 и увеличивается, приближаясь к единице, в процессе итераций пересчетом в виде $p_{k+1} = ap_k + b$, где $b = 1 - a$ и $a < 1$ (обычно 0,995). Для конкретной реализации коэффициент можно пересчитывать иначе, например, выбор рекурсии второго порядка для этого коэффициента отвечает дополнительной цели «раскачивания» матрицы пульсирующим сжатием.

Процедура 4. Ортогонализация сжатой матрицы по методу Грамма — Шмидта. Перестановка столбцов создает эффективное «зацепление» за максимально измененный в желаемом смысле вектор. Ортогонализация не меняет его направление и не восстанавливает, как это может быть в противном случае (без перестановки).

В результате выполнения текущей процедуры столбцы матрицы нормализуются, образуя единичные по норме орты.

Процедура 5. Принятие решения о переходе к процедуре 1 или завершении стадии 2 переходом к процедуре 6 по признакам достижения приемлемого качества решения, оцениваемого по многопараметрическому показателю.

Как правило, качественное решение отличается нулевым (или близким к нулю) значением квадратичной невязки ξ_k. В качестве контролируемого параметра может использоваться адамарова норма матрицы $h = m\sqrt{n}$, которая для искомых матриц принимает вполне конкретные значения [5].

Процедура 6. Завершение стадии 2 реверсной перестановкой столбцов с использованием вектора $\mathbf{X}_k$ для восстановления их исходной нумерации. После этого производится оценка качества решения, включающая проверку формы матрицы. Например, при поиске матриц Белевича [2] важна не только ортогональность матрицы, но и наличие на диагонали нулевых элементов. Для циклических, бициклических и других видов матриц оценивается сохранение их структуры, при несохранении стадия 2 завершается возвратом к стадии 1.

Стадия 2 завершается также принудительно после исчерпания отведенного на нее количества итераций поиска N_2.

Симметрии кодов матричного генератора

Матричный генератор придает формируемым им матрицам теплицеву или блочно-теплицеву структуру с возможными одинарной или двойной каймами. Такие «пространственные» структуры, симметричные относительно побочных диагоналей размещения элементов матрицы, разрешимы на семействах кодов (строках), обладающих явной или скрытой симметрией.

Определение 1. *Симметричная последовательность* элементов $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$ состоит из фрагментов исходного $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, ..., a_{v-1}]$ и реверсивного $\mathbf{b} = \mathrm{flip}(\mathbf{a}) = [a_{v-1}, a_{v-2}, a_{v-3}, ..., a_0]$ кодов длины v.

Определение 2. *Кососимметричная последовательность* элементов $[\mathbf{a}\ -\mathbf{b}]$ состоит из фрагментов исходного $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, ..., a_{v-1}]$ и реверсного со сменой знака $-\mathbf{b} = \mathrm{flip}(-\mathbf{a}) = [-a_{v-1}, -a_{v-2}, -a_{v-3}, ..., -a_0]$ кодов длины v.

Для формирования кодов нечетной длины фрагменты могут содержать стартовый, финальный или промежуточный элемент или блоки элементов. Иными словами, о симметрии последовательности можно говорить и в том случае, когда исходный и реверсный коды дополнены разделяющими их или расширяющими кодовую последовательность элементами, размещенными в различных сочетаниях. Стоит отметить, что и реверсивный вид (флип), и смена знака могут заменяться на другие операции, поскольку идея симметрии связана не столько с операциями, сколько с идеей дополнения.

Рассмотрим обратимую операцию разделения некоторой последовательности $\mathbf{d}$ на два внутренних блока четных $\mathbf{a}$ и нечетных $\mathbf{b}$ по индексу элементов: $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}] = \mathrm{S}(\mathbf{d})$. Реверсивная операция

d = R([**a b**]) — действие, обратное к разделению индексов.

После операции R([**a b**]) симметричного кода симметрия его фрагментов может быть не видна, однако это не означает, что ее нет. Другим примером обратимой операции является операция циклического сдвига элементов последовательности влево или вправо. Таким образом, помимо явной формы, существуют *скрытые симметрии*, порожденные обратимыми операциями над симметричными кодами.

Симметричные коды широко встречаются при построении бициклических матриц, конференц-матриц или четырехблочных массивов Вильямсона [22]. Блочные конструкции имеет смысл рассматривать, если они стандартизованы и найдены посредством вычислений с привлечением значительных вычислительных ресурсов. Переход к более простым циклическим или негациклическим матрицам связан с выполнением R([**a b**]) образующих блоки кодов. Таким образом, при поиске матриц появляется необходимость в кодах, причем, возможно, с несколькими уровнями скрытой симметрии.

Если матрица с заданным типом «пространственной» структуры не разрешима для одной симметрии кодов, можно менять эту симметрию. Рассматриваемый подход — удобный источник классификаций решений по типам их симметрий.

Примеры матриц с элементами симметрии

Приведем несколько наглядных примеров, когда поиск матриц облегчается использованием перестановок, выявляющих скрытые виды симметрии.

Пример 1. На рис. 1, *а* показана негациклическая матрица Пэли [23] порядка 18, т. е. матрица с нулевой диагональю и остальными элементами 1 и –1, с ортогональными столбцами (строками). Эта матрица, на первый взгляд, не имеет симметрий, позволяющих облегчить поиск ее элементов, если они неизвестны.

Взглянем на ту же матрицу после применения к ней процедуры разделения четных и нечетных строк и столбцов (рис. 1, *б*).

Такую матрицу можно записать в виде двух возможных блочных форм — симметричной или кососимметричной:

$$\mathbf{C}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{C}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ -\mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix},$$

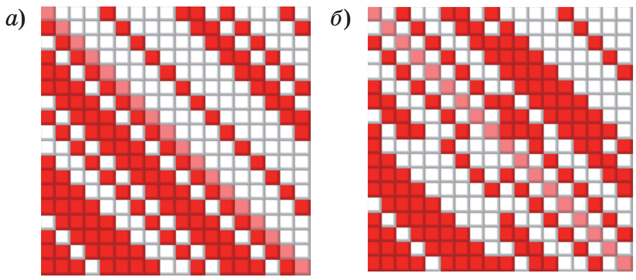
второй вариант получается инвертированием знаков двух нижних блоков.

Анализ выявляет скрытую симметрию, которая находит свое выражение в том, что блок **A** построен на кососимметричной последовательности элементов вида [0 **a** –**b**]. Второй блок **B** построен, напротив, на симметричной последовательности элементов вида [**a** –1 **b**], разделительный элемент (это может быть 1 и –1) расположен посередине. Такого сорта симметрия — инвариант искомой матрицы, значительно облегчающий ее поиск для остальных разрешенных (четных) матрицам Пэли порядков.

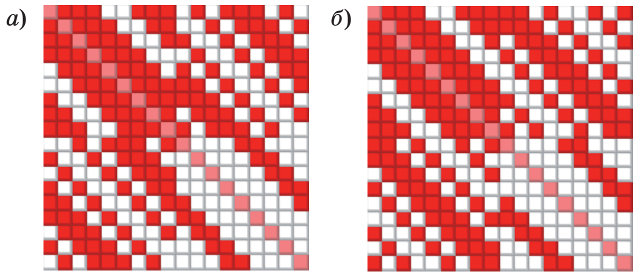
После нахождения новой матрицы в форме $\mathbf{C}_2$ реверсной перестановкой строк и столбцов она сводится к одноблочному негациклическому виду.

Пример 2. Преобразование вида **A** = **ZAZ**, **B** = **ZBZ**, где **Z** = diag(1, –1, 1, –1, ...), переводит негациклические блоки нечетного порядка в циклические (рис. 2, *а* и *б*): негациклическая матрица Пэли (см. рис. 1, *б*) преобразуется в циклическую ее форму [24] (см. рис. 2, *а*).

Двублочные циклические матрицы Пэли отличаются от негациклических тем, что ортогональность их строк и столбцов — инвариант циклического сдвига, поэтому несимметричную матрицу **B** можно симметрировать сдвигом, выводя средний разделительный элемент в начало матрицы. В данном случае мы видим, что, помимо матрицы со скрытой симметрией, существует еще один тип симметричных по обоим блокам матриц, выявляемый дополнительным преобразованием.



■ *Рис. 1.* Портреты матрицы Пэли до (*а*) и после (*б*) разделения



■ *Рис. 2.* Портреты циклической матрицы Пэли до (*а*) и после (*б*) симметрирования ее блоков

Заключение

Результативность рассмотренного в работе алгоритма сама по себе не зависит от того, заложены свойства симметрии в матричный генератор или нет, меняется только его производительность, оцениваемая числом итераций N_1, N_2.

Если симметрии кодов не известны заранее, они выявляются на низких порядках для всего семейства матриц, что позволяет ускорить впоследствии нахождение матриц более высоких порядков.

Изучение результатов вычислительных экспериментов показало, что функция насыщения максимумов элементов, имеющая непрерывный или гистерезисный характер, приближает алгоритм к классическим образцам замкнутых нелинейных динамических систем с возможностью привлечения для анализа получаемых решений математического аппарата странных аттракторов. При таком подходе искомая итерациями матрица — аттрактор нелинейного динамического процесса, порожденный квадратическими уравнениями связи (квадратичная задача). Аналогия поясняет расщепление количества уровней матрицы [5], наблюдаемое при прохождении точек бифуркации с изменением параметров нелинейной системы. В данном случае существенным параметром, определяющим качество решения, выступает порядок матрицы n.

Для критического нечетного значения порядка $n = 13$ (константа, близкая по смыслу к пороговому критерию Фейгенбаума [19]) наблюдается распад уровневой структуры матриц глобального максимума детерминанта. Решения становятся «фрактальными», что предопределяет переход к матрицам с локальным максимумом детерминанта.

Выделение (при поиске) как глобальных, так и локальных максимумов детерминанта матриц четных и нечетных порядков вводит в рассмотрение математический гиперобъект, порождающий все возможные ортогональные матрицы как его «срезы» на последовательно возрастающих порядках, начиная с тривиального первого.

Матрицы с небольшим числом отличающихся между собой по абсолютным величинам элементов существуют, в отличие от матриц Адамара (с элементами 1, –1), на всех значениях порядков [25, 26]. Более того, эксперимент показал, что матрицы со «слабыми оптимумами» (по детерминанту) несут, тем не менее, полную информацию о матрицах Адамара на сопредельных порядках. Располагая структурой таких матриц, как матрицы Мерсенна, Эйлера, Зейделя и Ферма [5–7, 12–19, 23, 24], можно строить и изучать свойства и конструкции матриц Адамара.

Литература

1. **Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.** Вычислительные методы линейной алгебры. 4-е изд., стер. — СПб.: Лань, 2009. — 736 с.
2. **Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.** Матрицы и вычисления. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 320 с.
3. **Тыртышников Е. Е.** Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Изд-во МГУ, 2005. — 372 с.
4. **Шарый С. П.** Курс вычислительных методов: учеб. пособие. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2011. — 316 с.
5. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2–15.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Нормы обобщенных матриц Адамара // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2014. Вып. 2. С. 5–11.
7. **Balonin N. A., Sergeev M. B.** Quasi-Orthogonal Local Maximum Determinant Matrices. *Applied Mathematical Sciences.* 2015. Vol. 9. N 6. P. 285–293. doi 10.12988/ams.2015.4111000
8. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques.* 1893. Vol. 17. P. 240–246.
9. **Belevitch V.** Theorem of 2n-terminal Networks with Application to Conference Telephony//Electrical Communication. 1950. N 26. P. 231–244.
10. **Olga Taussky.** (1, 2, 4, 8)-sums of Squares and Hadamard Matrices// Proc. Symp. Pure Math. Combinatorias, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1971. Vol. 19. P. 229–233.
11. **Jennifer (Seberry) Wallis.** Orthogonal (0,1,–1)-matrices // Proc. First Austral. Conf. Combinatorial Math., Newcastle, 1972. P. 61–84.
12. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А.** Вычисление матриц Адамара — Мерсенна // Информационно-управляющие системы. 2012. № 5(60). С. 92–94.
13. **Sergeev A. M.** Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. Vol. 48. N 4. P. 214–220. doi: 10.3103/S0146411614040063
14. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О двух способах построения матриц Адамара — Эйлера // Информационно-управляющие системы. 2013. № 1(62). С. 7–10.
15. **Balonin N. A., Vostrikov A. A., Sergeev M. B.** On Two Predictors of Calculable Chains of Quasi-Orthogonal Matrices // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49. N 3. P. 153–158. doi: 10.3103/S0146411615030025

16. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А.** Вычисление матриц Адамара — Ферма // Информационно-управляющие системы. 2012. № 6(61). С. 90–93.
17. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Матрицы Адамара нечетного порядка // Информационно-управляющие системы. 2006. № 3(22). С. 46–50.
18. **Balonin N. A., Seberry J.** Remarks on Extremal and Maximum Determinant Matrices with Moduli of Real Entries ≤ 1 // Информационно-управляющие системы. 2014. № 5(71). С. 2–4.
19. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** М-матрицы // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1(50). С. 14–21.
20. **Orrick W. P.** The Maximal {–1, 1}-determinant of Order 15 (accepted for publication in Metrika). 2004. http://arxiv.org/abs/math.CO/0401179 (дата обращения: 05.01.2014).
21. **Балонин Ю. Н.** Программный комплекс MMatrix-2 и найденные им М-матрицы // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. № 10(112). С. 58–64.
22. **Williamson J.** Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares// Duke Math. J. 1944. N 11. P. 65–81.
23. **Balonin N. A., Djokovich D.** Symmetry of Two Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs // Информационно-управляющие системы. 2015. № 3(76). С. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
24. **Balonin N. A., Djokovich D.** Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices// Информационно-управляющие системы. 2015. № 5(78). С. 2–17. doi: 10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
25. **Балонин Н. А.** О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков // Информационно-управляющие системы. 2013. № 2(63). С. 89–90.
26. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5(66). С. 2–8.

UDC 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2015.6.2

Initial Approximation Matrices in Search for Generalized Weighted Matrices of Global or Local Maximum Determinant

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
Sergeev M. B.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, mbse@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The goal is to demonstrate the importance of initial approximation matrices which describe the structure in the problems of search for orthogonal multilevel matrices of global or local maximum determinant. **Methods:** The search for matrices of global or local maximum determinant is performed by an iterative computational procedure focused on the minimization of the maximum absolute value of the elements of an orthogonal matrix, precomputing its initial approximation in a structured form given a priori. **Results:** The proposed approach which, at the first computational stage, takes into account the matrix structure and symmetry, significantly improves the efficiency of the search for row- or column-orthogonal generalized weighted matrices. It is expedient to consider both explicit and implicit symmetries of the matrices. Examples are given of hidden matrix symmetries, and the respective mappings are shown equivalent in respect to the determinant value. **Practical relevance:** Generalized weighted matrices of global or local maximum determinant are orthogonal and have a direct practical value for the problems of error-correcting coding, video compression and masking.

Keywords — Numerical Methods, Orthogonal Matrices, Weighted Matrices, Hadamard Matrices, Cyclic Matrices, Negacyclic Matrices, Bicirculant Matrices.

References

1. Faddeev D. K., Faddeeva V. N. *Vychislitel'nye metody lineinoi algebry* [Computational Methods of Linear Algebra]. Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2009. 736 p. (In Russian).
2. Voevodin V. V., Kuznetsov Iu. A. *Matritsy i vychisleniia*. [Matrices and Calculations]. Moscow, Nauka Publ., Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury, 1984. 320 p. (In Russian).
3. Tyrtyshnikov E. E. *Matrichnyi analiz i lineinaia algebra* [Matrix Analysis and Linear Algebra]. Moscow, Moskovskii gosudarstvennyi universitet Publ., 2005. 372 p. (In Russian).
4. Sharyi S. P. *Kurs vychislitel'nykh metodov* [The Course of Computational Methods]. Novosibirsk, Novosibirskii gosudarstvennyi universitet Publ., 2011. 315 p. (In Russian).
5. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local Maximum Determinant Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1(68), pp. 2–15 (In Russian).
6. Balonin N. A., Sergeev M. B. The Generalized Hadamard Matrix Norms. *Vestnik SPbGU*. Ser. 10, 2014, iss. 2, pp. 5–10 (In Russian).
7. Balonin N. A., Sergeev M. B. Quasi-Orthogonal Local Maximum Determinant Matrices. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 6, pp. 285–293. doi 10.12988/ams.2015.4111000
8. Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
9. Belevitch V. Theorem of 2n-terminal Networks with Application to Conference Telephony. *Electrical Communication*, 1950, no. 26, pp. 231–244.
10. Olga Taussky. (1, 2, 4, 8)-sums of Squares and Hadamard Matrices. *Proc. Symp. Pure Math. Combinatorias*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1971, vol. 19, pp. 229–233.
11. Jennifer (Seberry) Wallis. Orthogonal (0,1,–1)-matrices. *Proc. First Austral. Conf. Combinatorial Math.*, Newcastle, 1972, pp. 61–84.
12. Balonin N. A., Sergeev M. B., Mironovsky L. A. Calculation of Hadamard–Mersenne Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2012, no. 5(60), pp. 92–94 (In Russian).

13. Sergeev A. M. Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, vol. 48, no. 4, pp. 214–220. doi: 10.3103/S0146411614040063
14. Balonin N. A., Sergeev M. B. Two Ways to Construct Hadamard–Euler Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 1(62), pp. 7–10 (In Russian).
15. Balonin N. A., Vostrikov A. A., Sergeev M. B. On Two Predictors of Calculable Chains of Quasi-Orthogonal Matrices. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, vol. 49, no. 3, pp. 153–158. doi: 10.3103/S0146411615030025
16. Balonin N. A., Sergeev M. B., Mironovsky L. A. Calculation of Hadamard–Fermat Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2012, no. 6(61), pp. 90–93 (In Russian).
17. Balonin N. A., Mironovsky L. A. Hadamard Matrices of Odd Order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2006, no. 3(22), pp. 46–50 (In Russian).
18. Balonin N. A., Seberry J. Remarks on Extremal and Maximum Determinant Matrices with Moduli of Real Entries ≤ 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 5(71), pp. 2–4.
19. Balonin N. A., Sergeev M. B. M-matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2011, no. 1(50), pp. 14–21 (In Russian).
20. Orrick W. P. *The Maximal {–1, 1}-determinant of Order 15* (accepted for publication in Metrika). 2004. Available at: http://arxiv.org/abs/math.CO/0401179 (accessed 05 January 2014).
21. Balonin Yu. N. The Software Complex MMatrix-2 and Searched Minimax Matrices. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii* [Herald of Computer and Information Technologies], 2013, no. 10(112), pp. 58–64 (In Russian).
22. Williamson J. Hadamard's Determinant Theorem and the Sum of Four Squares. *Duke Math. J.*, 1944, no. 11, pp. 65–81.
23. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of Two Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3(76), pp. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2 (In Russian).
24. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 5(78), pp. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
25. Balonin N. A. Existence of Mersenne Matrices of 11th and 19th Orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 2(63), pp. 89–90 (In Russian).
26. Balonin N. A., Sergeev M. B. On the Issue of Existence of Hadamard and Mersenne Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 5(66), pp. 2–8 (In Russian).

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая SCOPUS и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, снижая рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста: входите на страницу http://www.researcherid.com, слева под надписью «New to ResearcherID?» нажимаете на синюю кнопку «Join Now It's Free» и заполняете короткую анкету. По указанному электронному адресу получаете сообщение с предложением по ссылке заполнить полную регистрационную форму на ORCID. Получаете ID.