УДК 519.61:511-33

Балонин Юрий Николаевич, инженер,

Егорова Ирина Сергеевна, аспирант,

Сергеев Александр Михайлович, ст. преподаватель.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения».

НЕГАЦИКЛИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ И ФИЛЬТРЫ МЕРСЕННА

В статье рассматривается задача построения основных обобщений матриц Адамара с ортогональными столцами и максимальным или не максимальным детерминантом (взвешенные матрицы, матрицы Мерсенна и Эйлера и т.п.); квазиортогональные матрицы локального максимума детерминанта Мерсенна изучены недостаточно полно. Цель настоящей работы заключается в развитии теории матриц Мерсенна на основе поиска обобщений функций Мерсенна-Уолша. Экстремальные решения ищутся посредством минимизации максимума абсолютных значений элементов матриц с последующей классификацией их по количеству и значениям уровней в зависимости от порядка. Предложено вычисление негациклических матриц Мерсенна нечетных простых порядков модификацией метода Пэли. Сформулировано положение о существовании соответствующих матриц Мерсенна нечетных простых порядков. Рассмотрены примеры сортировок матриц Мерсенна, позволяющих вычислить полную систему базисных функций. Приведено сравнение двух систем базисных функций Мерсенна-Уолша по их характеристикам и областям приложения. Охарактеризована эффективность развиваемых направлений построения помехозащитных фильтров Мерсенна. Алгоритмы построения матриц Мерсенна-Уолша использованы при создании программного обеспечения научно-исследовательского комплекса. Фильтры Мерсенна, базирующиеся на субоптимальных по детерминанту матрицах, использованы для маскирования и сжатия видеоинформации.

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, квазиортогональные матрицы, функции Уолша, матрицы Адамара, матрицы Мерсенна, функции Мерсенна-Уолша, циклические матрицы, негациклические матрицы.*

UDK 519.61:511-33

Balonin Yuriy Nikolaevich, ingineer, Egorova Irina Sergeevna, graduate student,

Sergeev Aleksandr Mikhaylovich, Senior Lecturer, Saint-Petersburg University of Aerospase Instrumentation.

Введение

Для многих приложений вычислительной математики, теории кодирования, цифровой обработки сигналов и т.д. важным требованием является простота, т.е. конечность множества значений функций ортонормированных систем [1, 2], для нахождения которых построены специальные комплексы [3]. Первая из таких систем – система Радемахера [4] – была построена в 1922 г. как существенно упрощенный аналог тригонометрической системы функций.

Функции Радемахера (меандры) имеют всего два значения {1, –1}. Их недостаток – система неполна и, следовательно, не является базисом в гильбертовом пространстве L_2. Полная система впервые была введена Дж. Уолшем в 1923 г. [5]. В отличие от функций Радемахера функции Уолша можно разделить на четные и нечетные, этим они аналогичны синусам и косинусам. В 1932 г. Р. Пэли предложил иной порядок их нумерации [6], оказавшийся удобным для вычисления. Помимо этого, существует упорядочение по Адамару [7], также важное при рассмотрении данной темы.

Вектор-столбцы матриц образуют базис, они порождают полную систему функций, которую называют системой функций Уолша, если столбцы нумеруются по количеству смены знаков их элементов (аналог частоты). Работа Хармута 1969 г. [8] свидетельствует о начале применения изначально сугубо теоретических функций Уолша в прикладных задачах коммуникаций. Примерно в это же время матрицы Адамара нашли непосредственное применение в помехоустойчивом кодировании информации в каналах радиосвязи для обеспечения полетов космических автоматизированных станций к Марсу.

Эти и другие применения стимулировали интерес к обобщенным теориям ортогональных базисов и новым системам функций. В работах [1, 2] были рассмотрены циклические матрицы Мерсенна-Уолша и фильтры, построенные на их основе.

Настоящая статья ставит целью рассмотреть негациклические матрицы Мерсенна, приводящие к базисам с новыми свойствами: у них повышенное вдвое количество уровней изменения значений порождаемых функций и, соответственно, они ведут к фильтрам с иными пропускными характеристиками.

Функции Мерсенна-Уолша

Система функций Мерсенна–Уолша – двухуровневая [1], такая же, как и классическая система Уолша [5]. Она отличается от функций Уолша пониженным по амплитуде нижним значением $-b$, которое с ростом размера системы стремится к -1. В этом смысле она отличается от системы функций Уолша, но является достаточно близкой аппроксимацией ее на нечетных значениях порядка. Систему функций Мерсенна–Уолша отличает также пониженное на единицу число порождающих ее столбцов матрицы Мерсенна, т.е. она проще классической для вычисления. Переход от функций Уолша к функциям Мерсенна-Уолша может быть кратко описан процедурой, состоящей в удалении каймы нормализованной матрицы Адамара порядка n, инверсии знака ее элементов, изменении значения нижнего уровня с -1 до $-b$, $b = \frac{t}{t+\sqrt{t}}$, где $t=(n+1)/4$ [2, 3].

Любой базис отличает предпочтительная область его применения. Система функций Мерсенна–Уолша более высокочастотная, чем система функций Уолша, в ее составе нет функции нулевой частоты (константы). Столбцы матрицы Мерсенна порядка 7 в виде сигналов (меандров) приведены на рис 1.

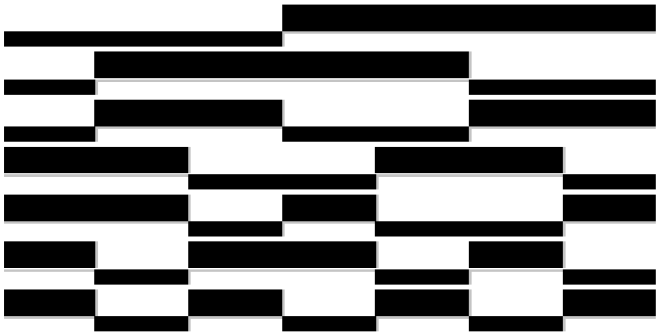


Рис. 1. Столбцы матрицы Мерсенна порядка 7 в виде сигналов меандров

Таким образом, для построения полосовых фильтров изображений первая система предпочтительнее. Единичные столбец и строка удаляемой каймы нормализованных матриц Адамара представляют собой ненужную составляющую, которая у полосовых фильтров никакой нагрузки не несет, поскольку отвечает фильтрующейся ими частоте и означает лишние затраты процессорного времени. Однако простое удаление канвы матрицы Адамара отбрасыванием ее первых строки и столбца нарушает ортогональность столбцов усеченной матрицы.

Недостаток такой системы функций в некоторых приложениях – она имеет слишком малое количество уровней значений элементов матрицы, препятствующее аппроксимации плавно изменяющихся значений. Мы рассмотрим сейчас метод повысить количество уровней, сохраняя основу – ортогональность модифицируемых функций Мерсенна-Уолша.

Порядки квазиортогональных матриц

Квадратные матрицы порядка *n* с ортогональными столбцами будем называть квазиортогональными. В ряде практически важных случаев (матрицы Адамара, матрицы Мерсенна и т.п.) максимально возможное значение элементов каждого столбца делают равным 1.

Это позволяет сравнивать матрицы между собой по детерминанту и выделять экстремальные матрицы, для нахождения которых удается построить эффективные алгоритмы [3].

При классификации бинарных, тринарных по элементам и т.п. матриц мы рассматриваем возможные (разрешенные) значения элементов, называемые уровнями, как ресурс, позволяющий ортогонализовать матрицу. Например, матрицы с положительными элементами ортогональными быть не могут, за исключением вырожденного случая на порядке 1. Часть элементов должна иметь отрицательные значения. Встает также вопрос о том, как расположить положительные и отрицательные элементы внутри матрицы. Циклическая структура является одной из простейших, образуемых последовательными состояниями сдвигового регистра (генератора матрицы).

Циклическая ортогональная матрица, это матрица порядка n, построенная на базе последовательности $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ циклическими ее сдвигами. Элементы бинарной последовательности принимают два значения $\{a, -b\}$.

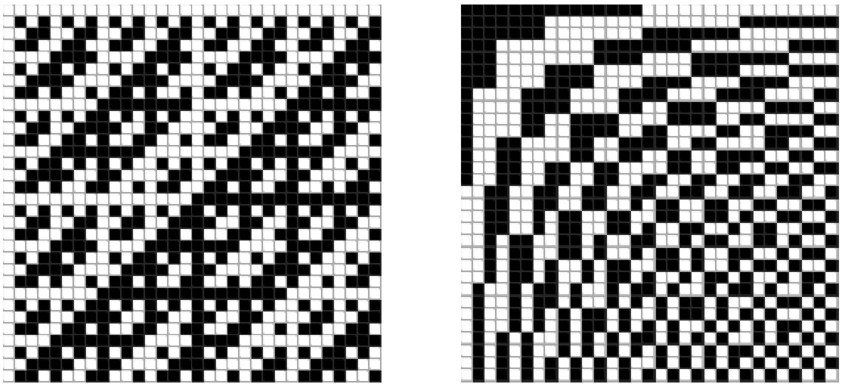
При равенстве $a=b=1$ ортогональные циклические матрицы являются матрицами Адамара [7]. Однако этот ресурс тоже недостаточный, согласно гипотезе Ризера [9] их порядок не превышает 4.

Более перспективны для формирования ортогональных массивов циклические конструкции на основе матриц с не равными друг другу значениями модулей их элементов. В работах [1, 2] были предложены квазиортогональные циклические бинарные матрицы Мерсенна, заданные зависимостями пары их элементов от порядка: $a=1$, $b=\dfrac{t}{t+\sqrt{t}}$, где $t=(n+1)/4$.

Циклические матрицы Мерсенна существуют для порядков, равных числам Мерсенна 2^k-1, где k – натуральное число, независимо от того, является ли порядок простым числом.

Это выделяет матрицы на основе чисел Мерсенна среди матриц других порядков вида n=4t−1, в которые они вложены. Дополнительный порядок, когда циклическая структура разрешена, должен быть либо простым, либо произведением пар двух близких простых чисел 15=3×5, 35=5×7 и т. п. Предположительно, иных порядков разрешимости циклической структуры при неравных бинарных уровнях нет.

Матрицы Уолша получаются из классических матриц Адамара [7] путем упорядочивания столбцов по частоте (по количеству смены знаков их элементов). Портреты матрицы Адамара порядка 32 до упорядочивания и итоговой матрицы Мерсенна-Уолша порядка 31 показаны на рис. 2.



а) *б*)

Рис. 2. Матрицы Адамара (*а*)

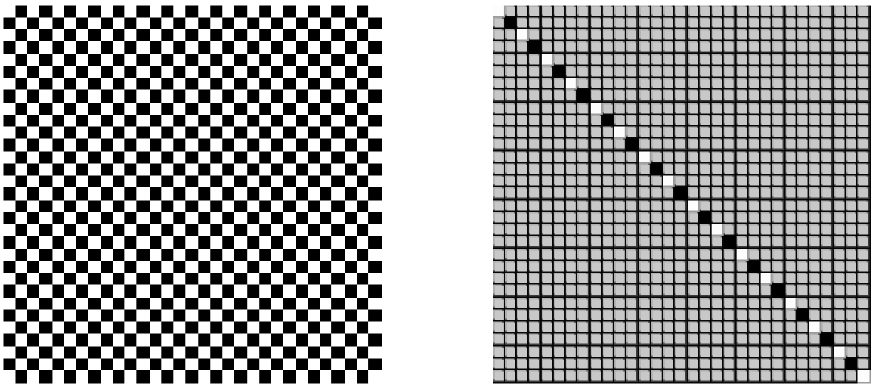
И Мерсенна-Уолша (*б*) порядков 32 и 31 соответственно

Для получения функций Мерсенна–Уолша упорядоченная матрица Адамара-Уолша инвертируется по знаку так, чтобы после удаления каймы число положительных элементов каждого столбца превышало число отрицательных на 1. Система ортогональных функций, генерируемых на основе упорядоченной матрицы без каймы со сбалансированным отрицательным элементом, данным формулой выше – называется системой функций Мерсенна–Уолша [1], в отличие от классических функций Уолша.

Негациклические квазиортогональные матрицы

Негациклические матрицы во многом похожи на циклические, но вытесняемый при сдвиге строки элемент ставится в начало с инверсным знаком. Вследствие этого кодовая последовательность приобретает ряд интересных свойств. В частности, негациклические матрицы существуют на значительно большем числе порядков, а их синтез существенно облегчен ввиду специфической симметрии, которой обладают ортогональные матрицы.

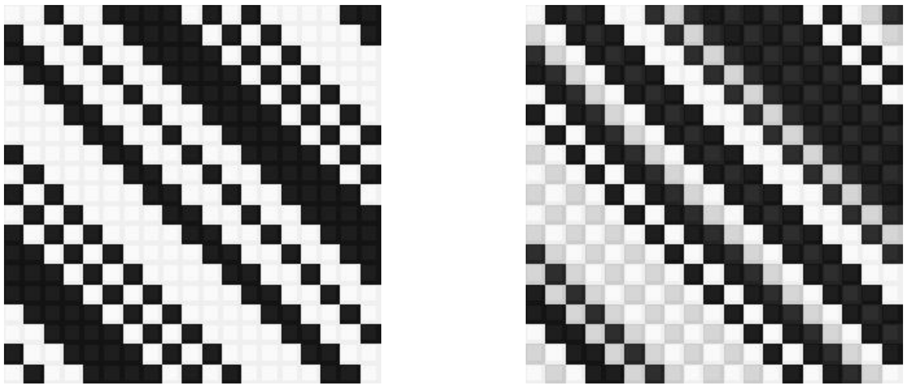
Матрица подобного преобразования **Z** циклической матрицы **C** нечетного порядка в негациклическую $\mathbf{N}=\mathbf{ZCZ}^{-1}$ представляет собой квадратный корень из единичной матрицы $\mathbf{I}=\mathbf{ZZ}^{\mathrm{T}}$, где $\mathbf{Z}=\mathrm{diag}(1, -1, 1, -1, \ldots)$, $\mathbf{Z}^{-1}=\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}=\mathbf{Z}$. Подобное преобразование матрицы из единиц **J** с нею имеет вид решетки (напоминающей шахматную доску, но число ее клеток вдоль стороны − *нечетное*) $\mathbf{N}chess=\mathbf{ZJZ}^{-1}=\mathbf{ZJZ}$ (рис. 3).



а) *б*)

Рис. 3. Матрица Z преобразования (*а*) и матрица решетки N*chess* (*б*)

В силу отмеченных выше свойств, преобразование может быть записано несколько иначе **N**=**N***chess*.***C**=**C**.***N***chess*, где (.*) обозначает операцию произведения Адамара – поточечное произведение матриц. Трансформация матрицы состоит в том, что на нее накладывается решетка знаков, т.е. знаки меняются там, где элемент решетки имеет знак минус. Результат умножения на решетку циклической матрицы Мерсенна **M** – есть негациклическая матрица Мерсенна **W**=**N**$chess.$***M**. На рис. 4 приведен пример для циклической матрицы Мерсенна порядка n=19 (рис. 4*а*), образуемой сдвигом последовательности $\boldsymbol{a}$=(1, 1, −b, 1, 1, −b, −b, −b, −b, 1, −b, 1, −b, 1, 1, 1, 1, −b, −b), где $b = \dfrac{t}{t+\sqrt{t}} = 0.69\ldots$. Матрица **M** преобразуется в негациклическую матрицу **W** (рис. 4*б*). Отметим, что бинарной циклической матрицы Адамара на соседнем порядке не существует.



а) *б*)

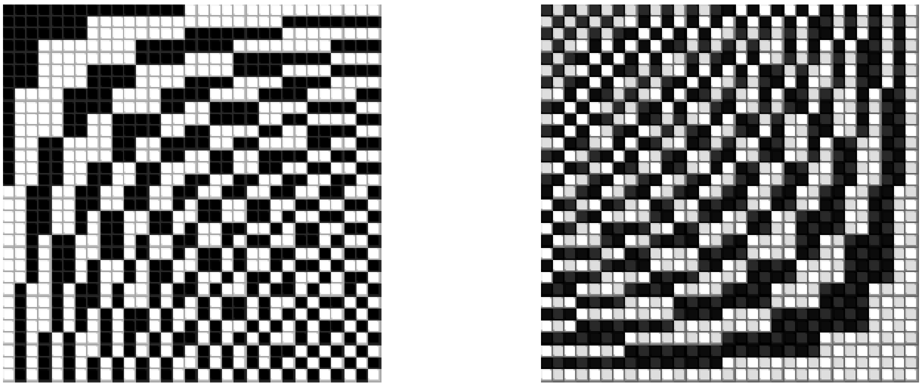
Рис. 4. Циклическая матрица Мерсенна M (*а*) и негациклическая W (*б*)

Негациклические матрицы Мерсенна **W** существуют для любого порядка n=4t−1 (t − натуральное число), где есть циклическая матрица Мерсенна. Инварианты матриц Мерсенна (превышение числа положительных элементов над отрицательными, тождественность знаков при равновеликих по абсолютным значениям элементах) сохраняются в скрытом виде. Их можно обнаружить лишь обратным переходом. Приведенные выше матрицы публикуются впервые.

Стоит отметить, что из выполнения гипотезы о существовании всех матриц Мерсенна [10] возможных конструкций (циклической, бициклической, бициклической с каймой) следует также выполнение гипотезы о существовании матриц Адамара порядков n=4t, поскольку матрицы Мерсенна входят в состав ядра ортогональной матричной конструкции Адамара. В отличие от матриц Адамара, матрицы Мерсенна не только существуют, но существуют, как видно, в более простой форме.

Четырехуровневые функции Мерсенна-Уолша

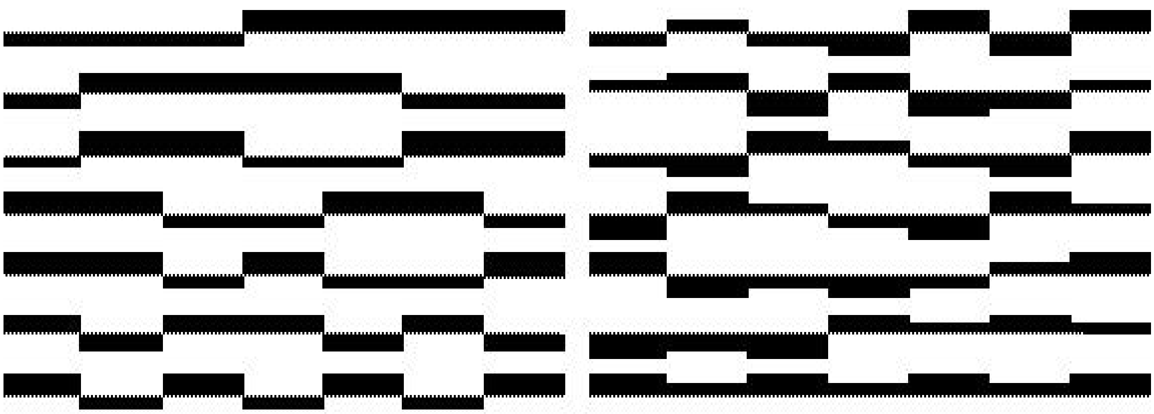
Характер действия **N***chess* наглядно представлен результатом умножения ее на ортогональную матрицу Мерсенна-Уолша: **W**=**N*chess.*****M** (см. рис. 5)**.**



а) *б*)

Рис. 5. Матрица Мерсенна-Уолша **M** (*а*) и результат ее преобразования **W** (*б*)

Как видно на рис. 5 после преобразования решеткой низкочастотные и высокочастотные ортогональные функции, представляющие собой строки и столбцы такой матрицы, меняются местами. Система функций, построенная с помощью матрицы **M**, имеет вдвое меньше уровней, чем система функций, построенная с помощью **W (**рис. 6).



а) *б*)

Рис. 6. Функции Мерсенна-Уолша (*а*) и модифицированные функции (*б*)

Система модифицированных функций Мерсенна-Уолша − четырехуровневая, более плавная и более приближенная к синусоидам.

Разработанная новая система ортогональных четырехуровневых функций Мерсенна–Уолша предназначена для применения в алгоритмах обработки изображений, в том числе при построении полосовых фильтров, используемых для сжатия информации в методах маскирования [2]. Новые матрицы дополняют ранее изученные нами конструкции [11, 12], а алгоритм их получения отличен от опубликованного ранее [13].

Для вычисления двухуровневых и четырехуровневых систем ортогональных функций Мерсенна–Уолша могут быть использованы глубоко проработанные в теории чисел алгоритмы вычисления символов Лежандра [9]. Целесообразность новой системы функций можно пояснить следующим.

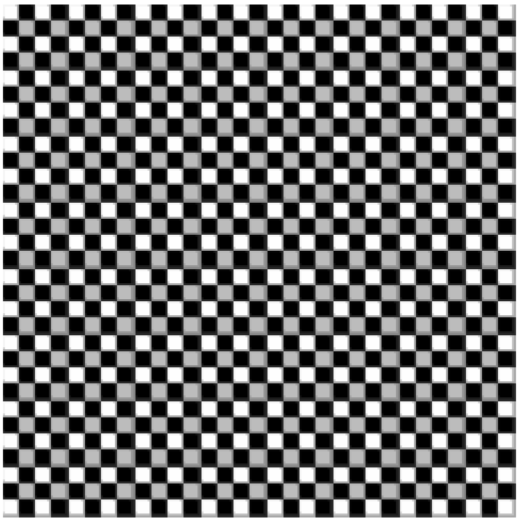
Прежняя система функций Мерсенна–Уолша [1] более высокочастотная, чем система функций Уолша [5]. В ее составе нет функции нулевой частоты (константы). В предлагаемой четырехуровневой конструкции появляется функция, относительно более близкая к постоянной составляющей (последняя функция). Фильтр, построенный при помощи расширенной по уровням системы ортогональных функций, обладает компромиссными качествами – это фильтр, несколько лучше аппроксимирующий постоянную составляющую, чем полосовой фильтр Мерсенна [2]. Таким образом, предлагаемая в настоящей работе система позволяет добиться нового качества, являясь решением между фильтром с функциями Уолша и фильтром с двухуровневыми функциями Мерсенна-Уолша.

Численные оценки эффективности фильтров Мерсенна-Уолша

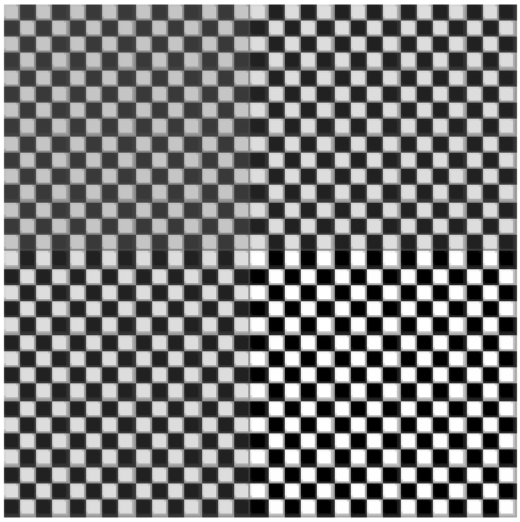
Для демонстрации изменения свойств двух фильтров Мерсенна-Уолша с нормализованными по нормам столбцов матрицами **M** и **W** порядка n=31 (число Мерсенна) рассмотрим, к каким конкретным ошибкам приводит игнорирование высокой частоты при передаче низкочастотного изображения.

Для числового теста достаточно будет белого фона, т.е. матрицы **P** из 1 с двумерными спектрами **S**=**M**$^{\mathrm{T}}$**PM** и **F**=**W**$^{\mathrm{T}}$**PW** соответственно. Отфильтруем высокочастотную часть спектров, обнулив нижний правый элемент **S**[n,n] и верхний левый элемент **F**[1,1], поскольку базисные функции обоих спектров инверсны по частоте флуктуаций (см. рис. 5).

После этого восстановим исходное изображение **P**=**MSM**$^{\mathrm{T}}$ и **P**=**WFW**$^{\mathrm{T}}$, не меняя обозначений для большей простоты. Восстановленные изображения будут отличаться от 1 на величину ошибки ввиду фильтрации, которая равна 0, если не вносить изменения. Матричные портреты ошибок выведены на рис. 7.



а)



б)

Рис. 7. Ошибки фильтров Мерсенна-Уолша с матрицами **M** (*а*) и **W** (*б*)

В первом случае амплитуда флуктуаций ошибок достигает значения 0,041, тогда как во втором значительно меньше – 0,00093. Этот числовой пример подтверждает, что второй введенный нами фильтр отличают существенно меньшие искажения при обработке низкочастотных изображений.

Заключение

Общей универсальной эффективной полосы пропускания для всех возможных входных сигналов у фильтров теоретически не существует. Эффективность применения фильтров зависит от возможности настраивания полосы пропускания. Описанное **Z**-преобразование при получении негациклических видов квазиортогональных матриц увеличивает число уровней базисных функций вдвое, что свидетельствует об их свойстве сглаживании. Появившаяся, в связи с использованием нового алгоритма расчета базисных функций, возможность влиять на полосу пропускания является новым качеством, обеспечивающим преимущество нового метода в сравнении с прежним подходом.

Как было отмечено выше, некоторые матрицы в данной работе опубликованы впервые. Авторы, начиная с этой статьи, ставят цель продолжить публиковать уникальные матрицы (таблицы их параметров), а также алгоритмы их вычисления.

Литература

1. **Балонин Н. А., Балонин Ю. Н., Востриков А. А., Сергеев М. Б.** Вычисление матриц Мерсенна-Уолша // Вестник компьютерных и информационных технологий (ВКИТ) 2014. № 11. С. 51–55.
2. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О расширении ортогонального базиса в задачах сжатия видеоизображений // Вестник компьютерных и информационных технологий (ВКИТ) 2014. № 2. С. 11–15.
3. **Балонин Ю. Н.** Программный комплекс MMatrix-2 и найденные им М-матрицы // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. № 10(112). С. 58–64.
4. **Rademacher H.** Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. 1922. V. 87, № 1–2. P. 112–138.
5. **Walsh J. L.** A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math. 1923. V. 45. P. 5–24.
6. **Paley R. E. A. C.** A Remarkable Series of Orthogonal Functions. I, II // Proc. Lond.

Math. Soc. 1932. V. 34. P. 241–279.

7. **Hadamard J.** Résolution d'une question relative aux déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1893. № 17. P. 240–246.
8. **Harmuth H. F.** Applications of Walsh Functions in Communications // IEEE Spectrum. 1969. № 6. P. 82–91.
9. Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition (Discrete Mathematics and its Applications). 2nd Ed. / Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz Ed. – Chapman and Hall, 2006. – 1000 p.
10. **Сергеев А. М.** Обобщенные матрицы Мерсенна и гипотеза Балонина // Автоматика и вычислительная техника. 2014. №4. С. 35–41.
11. **Балонин Н. А., Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б**. Вычисление матриц Мерсенна и Адамара методом Скарпи // Вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 3. С. 104–112.
12. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** М-матрица 22-го порядка // Информационно-управляющие системы. 2011. № 5. С. 87–90.
13. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б**. Алгоритм и программа поиска и исследования М-матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3. С. 82–86.

NEGACIRCULANT MERSENNE MATRICES AND FILTERS

The paper deals with the problem of basic generalizations of Hadamard matrices associated with maximum determinant matrices or not optimal by determinant matrices with orthogonal columns (*weighing matrices*, *Mersenne and Euler matrices*, *ets.*); *quasi-orthogonal local maximum determinant Mersenne matrices studied not enough sufficiently. The goal of this paper is to develop theory of Mersenne matrices on the research results of generalized Mersenne-Walsh functions. Extreme solutions have been established by minimization of maximum of absolute values of the elements of the matrices followed its subsequent classification according to the quantity of levels and its values depending on orders. Computation of negaciclic Mersenne matrices of odd prime orders by modified method of Paley have been proposed. The information accordingly existence of corresponding Mersenne matrices of odd order have been formulated. The examples of sorted Mersenne matrices allowing to calculate the whole system of basis functions have been observed. The two systems of Mersenne–Walsh basis functions have been* *compared by their characteristics and applications. The efficiency of developing directions to construct the bandpass Mersenne filters have been commented. Algorithms to construct the Mersenne–Walsh matrices have been implemented in developing software of the research program-complex. Mersenne filters based on the suboptimal by determinant matrices have been used for the masking and image compression.*

Keywords: Orthogonal matrices; Quasi-orthogonal matrices; Walsh functions; Hadamard matrices; Mersenne matrices; Mersenne–Walsh matrices, circulant matrices, negacirculant matrices.