1. ОБЗОР МЕТОДОВ КОМПЬЮТЕРНОГО АНАЛИЗА СИСТЕМ

1.1. Сингулярные числа и сингулярные векторы матриц

Понятия сингулярных чисел и собственных векторов возникли в матричной алгебре и нашли широкое применение в численном анализе. На этой основе формировалось соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение. Как следует из примечания Х.Д. Икрамова к переводу книги Ч. Лоусона и Р. Хенсона [76] по вычислительным методам, в отечественной литературе методы численного решения задач наименьших квадратов обойдены вниманием, исключением являются лишь отдельные главы книг В.В. Воеводина, например [46]. Иными словами, в данном направлении, приведшем к достаточно важным обобщениям, наблюдается определенный дефицит информации, и это касается также компьютерного анализа динамических систем. Вместе с тем, в связи с развитием и широким распространением персональных компьютеров, начиная с девяностых годов компьютерные методы становятся все более популярными.

Поэтому, перед тем как приступить к разбору интересующих нас методов анализа динамических систем, рассмотрим понятия, которые были предложены в вычислительной математике и существенно повлияли в дальнейшем на последующие теоретические изыскания в других областях. В частности, понятие сингулярных чисел матриц было обобщено в работах Гловера [125] и названо ганкелевыми сингулярными числами передаточной функции линейной динамической системы.

Сингулярные числа матриц тесно связаны с разложениями матрицы на более простые составляющие, необходимые при рассмотрении вопросов редукции линейных алгебраических систем. Они могут быть определены аксиоматически и рассматриваться сами по себе безотносительно к указанным разложениям.

Сингулярное число сопровождается понятием соответствующего ему сингулярного вектора или, применительно к динамическим системам, сингулярной функции линейного оператора. Определение таких сингулярных функций полезно привести, ввиду того, что оно недостаточно широко известно. В [76] определение сингулярного вектора матрицы выводится из ее сингулярного разложения. В целях простоты, воспользуемся более классическим подходом. В нем в первую очередь рассматриваются понятия собственного числа λ и собственного вектора $\mathbf{h}$ матрицы $\mathbf{A}$, связанных формулой $\mathbf{Ah} = \lambda\mathbf{h}$, которая и положена в основу их широко известного аксиоматического определения.

По определению, собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$ – это такой вектор, который при умножении на нее изменяется с точностью до постоянного коэффициента λ, называемого собственным числом матрицы $\mathbf{A}$. Понятия собственного числа и соответствующего ему собственного вектора матрицы устоялись и не нуждаются в более подробных комментариях. Далее, в теории матриц вводится понятие транспонированной матрицы, а в более общем случае – комплексно сопряженной $\mathbf{A}^*$. Из двух произведений $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{AA}^*$ выбирается то, которое имеет меньшую размерность, и корни квадратные из собственных чисел выбранной матрицы называются сингулярными числами матрицы $\mathbf{A}$, а соответствующие им собственные векторы называются сингулярными. Эти очевидно распространенные теперь уже понятия собственных и сингулярных чисел логично продолжить на математические объекты, отличные от матриц, но общие с ними в том, что они конкретизируют те или иные линейные операторы.

Становление общей теории тормозилось тем, что линейные динамические системы не повторяют входной сигнал с точностью до постоянного множителя, а, следовательно, для них нет собственных чисел и соответствующих собственных векторов. Заметим, это не является препятствием к введению сингулярных чисел, что и было сделано в 1984 году Гловером [125].

Гловер не только предложил определение сингулярных чисел передаточной функции динамической системы, но также, опираясь на практические стороны применения сингулярных чисел, используемые в вычислительной математике для редукции систем линейных алгебраических уравнений, разработал алгоритм редукции передаточных функций.

Тем самым, метод редукции систем линейных алгебраических уравнений по сингулярным числам матрицы системы послужил у Гловера сходным задачам редукции динамических систем высокого порядка по сингулярным числам передаточной функции, и понятие, подкрепленное указанным практическим применением, утвердилось.

1.2. Сингулярные числа и сингулярные функции динамических систем

Перейдем к более полному описанию линейных динамических систем с тем, чтобы ввести интересующие нас понятия более строго.

Следуя Гловеру [125], рассмотрим линейную стационарную динамическую систему с одним входом и одним выходом, описываемую уравнениями в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния, $u(t)$, $y(t)$ – входной и выходной сигналы соответственно для каждого $t \geq 0$. Передаточная функция системы имеет вид

$$Q(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \tag{1.2.2}$$

Если собственные значения матрицы **A** расположены строго в левой части комплексной плоскости, можно определить также грамианы управляемости и наблюдаемости, соответственно, как

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}t} dt, \quad \mathbf{R} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^* t}\mathbf{C}^*\mathbf{C} e^{\mathbf{A}^* t} dt. \qquad (1.2.3)$$

Обе указанные выше матрицы могут быть найдены из уравнений Ляпунова вида

$$\mathbf{AP}+\mathbf{PA}^*+\mathbf{BB}^*=0,\ \mathbf{A}^*\mathbf{R}+\mathbf{RA}+\mathbf{CC}^*=0.$$

Эти матрицы при линейном преобразовании координат $\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ меняются конгруэнтно: $\mathbf{TPT}^*$, $\mathbf{T}^{*-1}\mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}$, однако их произведение изменяется преобразованием подобия $\mathbf{TPRT}^{-1}$. Следовательно, собственные числа произведения матриц $\mathbf{PR}$ не зависят от выбора базиса и являются вход-выходными инвариантами данной линейной динамической системы. Опираясь на это обстоятельство, Гловер предложил следующее определение.

Определение. Пусть линейная динамическая система (1.2.1) устойчива, тогда ганкелевы сингулярные значения ее передаточной функции определяются как корни квадратные из собственных чисел матрицы кросс-грамиана

$$\sigma_i(Q(p)) = \{\lambda_i(\mathbf{PR})\}^{1/2}. \qquad (1.2.4)$$

Также, как и при упрощении систем линейных алгебраических уравнений, редукция динамических систем состоит в поиске модели системы более низкого порядка с теми же самыми сингулярными числами, исключая самые малые из них.

В целях упрощения выкладок Гловер вводит в рассмотрение класс односвязных систем с дискретным временем вида

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \tilde{\mathbf{A}}\,\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\,u(t) \\ y(t) &= \tilde{\mathbf{C}}\,\mathbf{x}(t) \end{aligned}, \qquad (1.2.5)$$

с марковскими параметрами $\tilde{\mathbf{H}}_k = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{k-1}\tilde{\mathbf{B}}$, $k = 1,2,3,....$, составляющими элементы ганкелевой матрицы **H**. Ганкелева матрица может быть определена произведением матриц $\mathbf{H} = \mathbf{W}_{\text{o}}\ \mathbf{W}_{\text{c}}$, где $\mathbf{W}_{\text{o}} = [\ \mathbf{C}^*,\ \mathbf{A}^*\mathbf{C}^*,\ \ldots,\ \mathbf{A}^{*k}\mathbf{C}^*,\ \ldots]^*$, $\mathbf{W}_{\text{c}} = [\ \mathbf{B}, \mathbf{AB}, \ldots, \mathbf{A}^k\mathbf{B}, \ldots\ ]$, ее ранг меньше или равен порядку системы n.

Сингулярные значения этой матрицы могут быть вычислены из

$$\sigma_i(\mathbf{H})^2 = \lambda_i(\mathbf{H}^*\mathbf{H}) = \lambda_i(\mathbf{W}_c{}^*\mathbf{W}_o{}^*\ \mathbf{W}_o\,\mathbf{W}_c) = \lambda_i(\mathbf{W}_c\,\mathbf{W}_c{}^*\ \mathbf{W}_o\,\mathbf{W}_o{}^*) = \lambda_i(\mathbf{PR}), \qquad (1.2.6)$$

и, следовательно, ганкелевы сингулярные значения передаточной функции динамической системы совпадают с сингулярными значениями матрицы **H**, что служит основой еще одного определения.

Ганкелева матрица **H** может быть интерпретирована как матрица оператора, осуществляющего отображение пространства входных сигналов в прошлом в выходные сигналы в будущем.

Запишем некоторый вектор $\mathbf{x}(0) = \mathbf{W}_{\text{c}}[\,u(-1), u(-2), \ldots\ ]^{\text{T}}$. Пусть при $t \geq 0$ управление $u(t) = 0$, тогда выход $[\,y(0), y(1), \ldots\ ]^{\text{T}} = \mathbf{W}_{\text{o}}\ \mathbf{x}(0)$, что ведет к следующей формуле $[\,y(0), y(1), \ldots\ ]^{\text{T}} = \mathbf{H}\ [\,u(-1), u(-2), \ldots\ ]^{\text{T}}$. Обратим внимание на инверсию отсчетов входного сигнала по отношению к выходному. Выходной сигнал, взятый в качестве входного, на котором реализуется собственное значение **H**, является собственным вектором, соответствующим собственному числу $\lambda_i(\mathbf{H}^*\mathbf{H}) = \sigma_i(\mathbf{H})^2$.

Собственные векторы матрицы **H** являются также и ее сингулярными векторами, поскольку она симметрична. Ганкелевы сингулярные значения, следовательно, это сингулярные значения линейного оператора отображения прошлых сигналов в будущую реакцию.

Согласно [125], для моделей (1.2.1) с непрерывным временем ганкелев оператор Γ_Q вводится как оператор отображения $\Gamma_Q : L^2(0,\infty) \to L^2(0,\infty)$

$$\Gamma_Q v(t) = \int_0^\infty \mathbf{C} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t+\tau)} \mathbf{B} v(\tau) d\tau, \tag{1.2.7}$$

Сопряженный ганкелеву оператор вводится как

$$\Gamma_Q^{\ *} y(t) = \int_0^\infty \mathbf{B}^* \mathrm{e}^{\mathbf{A}^*(t+\tau)} \mathbf{C}^* y(\tau) d\tau, \tag{1.2.8}$$

Предположим, что σ_i – сингулярное значение, отвечающее сингулярному вектору $v(t)$, совпадающему с собственным вектором $\Gamma_Q^{\ *}\Gamma_Q$.

Определение сингулярной функции. Сингулярной функцией $v(t)$ (сингулярным вектором) ганкелева оператора Γ_Q называется собственный вектор оператора $\Gamma_Q^{\ *}\Gamma_Q$, удовлетворяющий условию $\Gamma_Q^{\ *}\Gamma_Q\, v(t) = \sigma_i^{\ 2}\, v(t)$.

Данные определения ганкелевых сингулярных значений и сингулярных функций (сингулярных векторов) линейного ганкелева оператора, введенные Гловером [125], естественным образом обобщает аналогичные понятия, применяемые в книге Ч. Лоусона и Р. Хенсона [76]. Они применены для решения сходных по существу задач вычисления степени обусловленности и редукции плохо обусловленных систем. Тем самым, они являются достаточно важными обобщениями и расширениями существующих понятий теории линейных систем на случай динамических объектов, описываемых передаточными функциями.

Напомним, что при определении сингулярных чисел матриц рассматриваются оба произведения $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ и $\mathbf{AA}^*$. При переходе к динамическим системам одно из произведений, сходных этому, образует линейный оператор, описывающий прохождение входного сигнала через исходную и сопряженную системы, а второе – дает матрицу кросс-грамиана, образуемую из произведения грамианов управляемости и наблюдаемости, введенных в теории Калмана. Поэтому сингулярные числа динамической системы определяются также через корни квадратные из собственных чисел матрицы кросс-грамиана.

В рамках этого направления были постулированы и изучены ганкелевы сингулярные числа, ганкелевы сингулярные функции, ганкелева норма передаточной функции [1, 125, 135, 136], каноническая форма Мура (сбалансированная каноническая форма динамической системы) и др., широко используемые при решении задач аппроксимации и редукции математических моделей объектов [7, 81, 133], при синтезе робастных систем методами H_∞–теории [122, 126], при решении задач идентификации параметров математических моделей объектов [129-131].

1.3. Содержание ганкелева эксперимента с объектом

Из предыдущего следует, что для того, чтобы экспериментально наблюдать действие ганкелева оператора на сигнал $u(t)$, заданный на интервале $(0,\ \mathrm{T}_1)$, надо развернуть его во времени, перейдя к сигналу $u(-t)$, возбудить им систему на интервале $(-\mathrm{T}_1,\ 0)$, и зарегистрировать реакцию на интервале $(0,\ \mathrm{T}_2)$. Далее указанную последовательность действий будем для краткости называть *ганкелевым экспериментом*.

Ганкелев оператор играет важную роль в современной теории. В отличие от оператора свертки, который отображает текущие входы системы в ее текущие выходы, ганкелев оператор Г описывает отображение прошлых входов в будущие выходы.

Для системы с импульсной характеристикой $q(t)$ он описывается также формулой

$$y(t) = Гu(t) = \int_{-\infty}^{0} q(t-\tau)u(-\tau)d\tau.$$

Сигнал $y(t)$, определяемый этой формулой, можно интерпретировать как реакцию системы при $t > 0$ на сигнал $u(-t)$, подаваемый на вход системы на интервале времени $(-\infty, 0)$. На практике длительности сигналов $u(t)$, $y(t)$ берутся конечными и равными T, где T – время успокоения системы.

Записывая в запоминающее устройство (ЗУ) компьютера различные сигналы $u(t)$ длительности T и подавая их на вход системы на интервале времени (–T, 0), можно экспериментально наблюдать на выходе системы на интервале (0,T) результат преобразования их с помощью ганкелева оператора в сигналы $y(t)$.

На рис. 1.3.1. приведены ганкелевы сингулярные функции системы, заданной передаточной функцией $Q(p) = \dfrac{39p + 105p + 250}{(p+2)(p+5)}$.

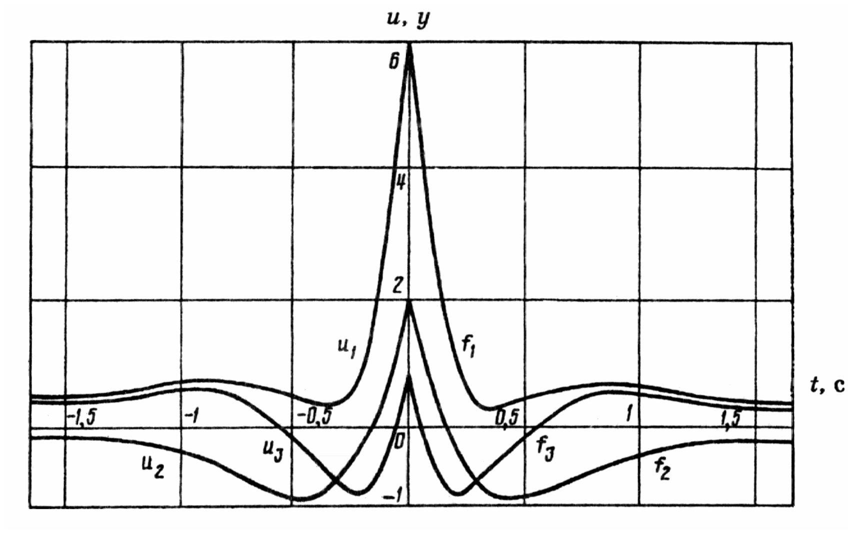

Рис. 1.3.1. Ганкелевы функции скалярной системы.

Значения ганкелевых сингулярных чисел равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -0,5$. Им соответствуют ганкелевы сингулярные функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$, графики которых показаны на рисунке справа от оси ординат.

Ганкелевы сингулярные функции представляют собой выходные сигналы модели, возбуждаемой при t < 0 сигналами $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, являющимися зеркальными отражениями функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ относительно оси ординат. Масштаб графиков $u_i(t)$ уменьшен в λ_i раз.

В работе [82] исследованы собственные функции ганкелева оператора скалярных систем и сингулярные функции ганкелева оператора многосвязных систем. Эти функции несут существенную информацию о системе и оказываются полезными при анализе ее минимальности, идентифицируемости и диагностируемости. Кроме того, они обладают экстремальными свойствами и могут быть получены как решения специальных оптимизационных задач.

Использование этих методов требует знания математического описания исследуемой системы, например, ее матричной передаточной функции или описания в пространстве состояний. При решении прикладных задач возникает необходимость в отыскании собственных и сингулярных функций ганкелева оператора и при неизвестном описании объекта.

Можно выделить два подхода к нахождению сингулярных чисел – аналитический и экспериментальный. Аналитические методы опираются на соответствующие формулы. Однако для их применения необходимо знать матрицы **A**, **B**, **C** описания системы в пространстве состояний либо матричную импульсную характеристику объекта. Если же математическое описание исследуемого объекта неизвестно, то аналитические методы непосредственно неприменимы.

В таких случаях следует использовать подход, предполагающий разработку методов определения ганкелевых собственных и сингулярных функций путем проведения некоторых вход-выходных экспериментов над объектом, рассматриваемых в диссертации.

Стандартным средством описания линейных динамических систем является оператор свертки. Он характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени (0, T), в множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же самом интервале. Для системы с импульсной характеристикой $q(t)$ оператор свертки описывается формулой

$$y(t) = Su(t) = \int_0^t q(t-\tau)u(\tau)d\tau .$$

Такой оператор отвечает режиму работы систем в реальном времени, типичному для большинства задач теории автоматического управления и теории электрических цепей.

Для этого оператора также возможно введение понятий сингулярного числа и сингулярного вектора (функции). Формально это не вызывает особых осложнений, но трудность решаемых при этом задач значительно выше в сравнении со случаем ганкелева оператора. Математическая теория в этой области развита недостаточно полно, а алгоритмы и, тем более, вычислительные методы отсутствуют.

Так, например, в системе MATLAB для вычисления ганкелевых сингулярных чисел и матриц связанного с ними канонического описания динамической системы есть специальная функция **balreal**. Для оператора свертки и других возможных операторов, на которых может быть основан анализ динамической системы в режиме, ином, чем ганкелев эксперимент, нередко более отвечающем практическим условиям, подобного рода программ и функций нет.

В данной диссертации этот вопрос решается, вводятся соответствующие определения, предлагаются алгоритмы и вычислительные методы, реализованные в программном обеспечении автора VISUAL MATLAB.

1.4. Применение сингулярных чисел для идентификации систем

Разработка теории сингулярных чисел динамических систем привела к становлению новых методов идентификации. Ниже приведена примерная форма матриц уравнений пространства состояний динамической системы вида

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\
\mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

с двумя входами и тремя выходами из работы Мациевского [129], где

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
-\dfrac{\|\mathrm{B}_1\|^2}{2\sigma_1} & \dfrac{\sigma_2 \mathrm{B}_1\mathrm{B}_2^{\mathrm{T}} - \sigma_1 \mathrm{C}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_2}{\sigma_1{}^2 - \sigma_2{}^2} & \dfrac{\sigma_3 \mathrm{B}_1\mathrm{B}_3^{\mathrm{T}} - \sigma_1 \mathrm{C}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_3}{\sigma_1{}^2 - \sigma_3{}^2} & \dfrac{\sigma_4 \mathrm{B}_1\mathrm{B}_4^{\mathrm{T}} - \sigma_1 \mathrm{C}_1^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_4}{\sigma_1{}^2 - \sigma_4{}^2} \\
\dfrac{\sigma_1 \mathrm{B}_2\mathrm{B}_1^{\mathrm{T}} - \sigma_2 \mathrm{C}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_1}{\sigma_2{}^2 - \sigma_1{}^2} & -\dfrac{\|\mathrm{B}_2\|^2}{2\sigma_2} & \dfrac{\sigma_3 \mathrm{B}_2\mathrm{B}_3^{\mathrm{T}} - \sigma_2 \mathrm{C}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_3}{\sigma_2{}^2 - \sigma_3{}^2} & \dfrac{\sigma_4 \mathrm{B}_2\mathrm{B}_4^{\mathrm{T}} - \sigma_2 \mathrm{C}_2^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_4}{\sigma_2{}^2 - \sigma_4{}^2} \\
\dfrac{\sigma_1 \mathrm{B}_3\mathrm{B}_1^{\mathrm{T}} - \sigma_3 \mathrm{C}_3^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_1}{\sigma_3{}^2 - \sigma_1{}^2} & \dfrac{\sigma_2 \mathrm{B}_3\mathrm{B}_2^{\mathrm{T}} - \sigma_3 \mathrm{C}_3^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_2}{\sigma_3{}^2 - \sigma_2{}^2} & -\dfrac{\|\mathrm{B}_3\|^2}{2\sigma_3} & \dfrac{\sigma_4 \mathrm{B}_3\mathrm{B}_4^{\mathrm{T}} - \sigma_3 \mathrm{C}_3^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_4}{\sigma_3{}^2 - \sigma_4{}^2} \\
\dfrac{\sigma_1 \mathrm{B}_4\mathrm{B}_1^{\mathrm{T}} - \sigma_4 \mathrm{C}_4^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_1}{\sigma_4{}^2 - \sigma_1{}^2} & \dfrac{\sigma_2 \mathrm{B}_4\mathrm{B}_2^{\mathrm{T}} - \sigma_4 \mathrm{C}_4^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_2}{\sigma_4{}^2 - \sigma_2{}^2} & \dfrac{\sigma_3 \mathrm{B}_4\mathrm{B}_3^{\mathrm{T}} - \sigma_4 \mathrm{C}_4^{\mathrm{T}}\mathrm{C}_3}{\sigma_4{}^2 - \sigma_3{}^2} & -\dfrac{\|\mathrm{B}_4\|^2}{2\sigma_4}
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{B} = \begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} \\
b_{21} & b_{22} \\
b_{31} & b_{32} \\
b_{41} & b_{42}
\end{pmatrix},
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{pmatrix}
cos(\varphi_{21})cos(\varphi_{11}) & cos(\varphi_{22})cos(\varphi_{12}) & cos(\varphi_{23})cos(\varphi_{13}) & cos(\varphi_{24})cos(\varphi_{14}) \\
cos(\varphi_{21})sin(\varphi_{11}) & cos(\varphi_{22})sin(\varphi_{12}) & cos(\varphi_{23})sin(\varphi_{13}) & cos(\varphi_{24})sin(\varphi_{14}) \\
sin(\varphi_{21}) & sin(\varphi_{22}) & sin(\varphi_{23}) & sin(\varphi_{24})
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\|\mathrm{B}_1\| \\
\|\mathrm{B}_2\| \\
\|\mathrm{B}_3\| \\
\|\mathrm{B}_4\|
\end{pmatrix},
$$

где $\sigma_1 > \sigma_{2_1} > \sigma_{3_1} > \sigma_{4_1} > 0$ – это сингулярные числа динамической системы, коэффициенты матрицы входа $b_{i1} > 0$, $b_{ij} \in \mathrm{R}$ для $j > 1$, $-\pi/2 < \varphi_{ij} < \pi/2$ (дополнительно разрешается $-\pi/2 < \varphi_{1j} < 3\pi/2$), $\mathrm{B}_i = [b_{i1}\, b_{i2}]$, C_i – это i– столбец C, $\|\mathrm{B}_i\| = \sqrt{\mathrm{B}_i \mathrm{B}_i{}^{\mathrm{T}}}$.

Эта каноническая форма динамической системы называется сбалансированной, и, как видно, матрица пространства состояний зависит от сингулярных чисел и коэффициентов матриц входа-выхода.

Умение определять сингулярные числа и прочие необходимые параметры из эксперимента дает решение задачи идентификации.

Поиск ганкелевых сингулярных чисел многосвязной системы натурным экспериментом позволяет не только уточнить параметры, но и обоснованно выбрать порядок математической модели, то есть, проводить структурную идентификацию.

Более точно задача такой идентификации может быть сформулирована следующим образом.

Имеется реальный объект с r входами и s выходами, удовлетворяющий принципу суперпозиции.

Назовем вход-выходным экспериментом над объектом процедуру подачи на его входы некоторого управляющего воздействия $\mathbf{u}(t)=[u_1(t), u_2(t), \ldots]^{\mathrm{T}}$ и регистрации выходных реакций (отклика) $\mathbf{y}(t)=[y_1(t), y_2(t), \ldots]^{\mathrm{T}}$ на это воздействие.

Требуется разработать метод, позволяющий в результате конечного числа таких экспериментов определить с заданной степенью точности ганкелевы сингулярные числа (и, в ряде случаев, соответствующие сингулярные функции) динамической системы с неизвестным математическим описанием.

Эта тема обсуждается в четвертой главе данной работы, где рассматриваются натурные эксперименты с исследуемым объектом, позволяющие определять ганкелевы сингулярные числа и функции многосвязной системы при неизвестном математическом описании объекта. Предложенный метод применим также и при возможных обобщениях линейного оператора системы.

1.5. Вопросы системного анализа условий идентифицируемости

Компьютерный анализ динамических систем опирается не только на идентификационные процедуры, но и на системные критерии идентифицируемости, позволяющие, в соответствии с теорией Калмана, оценить разрешимость идентификационного эксперимента до, собственно, применения процедур параметрической идентификации.

Задача идентификации может трактоваться, в частности, как обратная задача для линейной стационарной системы дифференциальных уравнений. Этот вопрос рассматривается подробно в работах Прасолова А.В. [99, 100]. Прежде всего в них отмечается, что в общей постановке задача восстановления всей матрицы коэффициентов линейной однородной стационарной системы является новой, хотя и простой. Условия ее разрешимости легко проверяемы, что позволяет строить не очень громоздкие компьютерные программы.

Для линейной однородной стационарной системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \tag{1.5.1}$$

также, как и в случае с ганкелевыми сингулярными числами, в работе [100] приводятся леммы и определения.

Лемма 1. Пусть одна и та же траектория $\mathbf{x}(t)$ на промежутке $[a, b]$ описывается двумя системами линейных дифференциальных уравнений: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}x(t)$. Если существует набор чисел $a \le t_1 < t_2 < ... < t_n \le b$ таких, что векторы $\{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), ..., \mathbf{x}(t_n)\}$ линейно-независимы, то $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Лемма 2. Если выполнено условие леммы 1, то для некоторого достаточно малого числа Δ среди точек разбиения $[a, b]$ на Δ-интервалы $\tau_k = a + k\Delta$ $(k = 1,..,m)$ существует набор $\{\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), ..., \mathbf{x}(t_n)\}$ линейно-независимых векторов.

Пусть имеется таблица чисел X_{m}, про которую нам известно, что ее столбец – точка на траектории системы $\mathrm{X}_{\mathrm{k}} = \mathbf{x}(t_{\mathrm{k}})$, $k \le m$, порядок системы $n < m$. На основании леммы 1 в этой прямоугольной таблице всегда может быть выделена невырожденная квадратная матрица **X** и матрица **Y**, отличающаяся от **X** сдвигом на один столбец вперед, так что становится возможным выписывание уравнения

$$e^{\mathbf{A}\Delta} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}. \tag{1.5.2}$$

Пусть матрица **S** составлена из собственных векторов вещественной матрицы **A** следующим образом: первыми в **S** стоят собственные векторы, отвечающие вещественным собственным числам **A**, а затем стоят парами комплексно сопряженные собственные векторы, соответствующие комплексно-сопряженным комплексным числам.

Пусть диагональная матрица **D** определена так: первыми элементами диагонали пусть будут нули, в таком количестве, сколько вещественных собственных значений у **A** с учетом их кратности, далее следуют парами по диагонали k_1 и $-k_1$, k_2 и $-k_2$ и т.д. по числу пар комплексно-сопряженных собственных чисел матрицы **A** (k_i - целые числа).

Лемма 3. Если $e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}$, то

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{S}2\pi j \mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}, \quad j = \sqrt{-1} \ . \tag{1.5.3}$$

Из вышеперечисленного следует теорема об идентифицируемости линейных стационарных однородных динамических систем, формулируемая в работе [100] следующим образом.

Теорема. Пусть таблица наблюдений X_{m} порождена системой (1.5.1) с неизвестной матрицей **A**, пусть наблюдения велись через равные интервалы времени $\Delta > 0$ и среди столбцов таблицы имеется набор **X** линейно-независимых векторов $\{\,\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2), ..., \mathbf{x}(t_{\mathrm{n}})\,\}$ и набор **Y** смещенных векторов $\{\,\mathbf{x}(t_2), \mathbf{x}(t_3), ..., \mathbf{x}(t_{\mathrm{n+1}})\,\}$. Тогда, если матрица $\mathbf{P} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$ логарифмируема, то матрица **A** может быть восстановлена с точностью до слагаемого $\mathbf{S}2\pi j \mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}/\Delta$, где **S** – матрица, построенная из собственных векторов **P** способом, описанным выше, **D** – диагональная матрица, также описанная выше. При этом указанное слагаемое зависит от целочисленных параметров в том количестве, сколько у **P** комплексно-сопряженных пар собственных чисел с учетом их кратности.

Как видно, помимо алгоритмов идентификации, вопросам идентифицируемости отводится достаточно серьезное внимание. Это составная часть компьютерного анализа систем, базирующегося на концепции Калмана, и помимо критериев управляемости и наблюдаемости можно вводить сходные с ними системные критерии идентифицируемости, вид которых зависит от наличия той или иной информации об объекте (допустим, в случае измерения производных). Этот вопрос также исследуется в диссертации в заключительной главе, в которой вводятся системные критерии и меры идентифицируемости.

1.6. Выводы

Математические методы моделирования систем, элементы их численной реализации и программное обеспечение развиваются и совершенствуются постоянно. Этому способствует появление новых взглядов на теорию систем, появление и развитие новых математических теорий.

В современной теории важное место уделяется ганкелевому эксперименту, идентификации систем по ганкелевым сингулярным числам, анализу идентифицируемости, соответствующим алгоритмам и программам, включая программы визуализации компьютерного эксперимента, что позволяет сделать его наглядным и более легко проверяемым. Помимо ганкелева эксперимента возможно проведение сходных с ним экспериментов, отвечающих другим сходным с ним в определенном смысле операторам. Отсюда возрастает значение классификации, которая могла бы помочь обозреть такие случаи. Этому материалу посвящена следующая глава.

Разработка теории сингулярных чисел динамических систем привело к становлению новых компьютерных методов анализа и идентификации, рассматриваемых, в частности, в работе [129] и других. Такие методы опираются на специальный вид матриц уравнений пространства состояний динамической системы, содержащих сингулярные числа передаточной функции динамической системы в качестве параметров. В диссертации рассматривается направление, связанное с обобщением этого подхода, вводятся сингулярные числа и сингулярные функции операторов для более общих условий эксперимента, чем ганкелев, подробно рассматриваются аналитические, алгоритмические и вычислительные аспекты.

Компьютерный анализ динамических систем опирается не только на процедуры идентификации, но и на критерии идентифицируемости, позволяющие, в соответствии с теорией Калмана, оценить разрешимость идентификационного эксперимента (включая ганкелев и другие эксперименты) до применения процедур идентификации. Это направление также рассматривается в диссертации, определяются некоторые системные критерии и меры идентифицируемости.

Исследование подкрепляется пакетом соответствующего программного обеспечения для проведения компьютерного анализа линейных динамических систем и визуализации экспериментов.