

2. СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ИХ СИММЕТРИЙ

2.1. Введение

Стандартным средством описания линейных динамических систем является оператор свертки. Он характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени $(0, T)$, в множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же самом интервале. Такой оператор отвечает режиму работы систем в реальном времени, типичному для большинства задач теории автоматического управления и теории электрических цепей.

Однако для ряда задач, например в тех случаях, когда интервалы управления и наблюдения не совпадают, оказывается удобным использовать иные операторы, например ганкелев оператор, операторы управления, наблюдения и другие [20, 82]. На деле нельзя ограничить круг линейных операторов, применяемых для описания одного и того же динамического объекта. Даже относительно небольшие изменения в условиях подачи и снятия сигнала сказываются на свойствах оператора линейной динамической системы.

Настоящая глава описывает и систематизирует ряд операторов, ассоциированных с линейной динамической системой и обладающих разными видами симметрии. При этом наряду с обычной рассматривается симметрия ганкелева и теплицева типа, а также некоторые виды скрытой симметрии. Симметричные системы часто наделены уникальными свойствами, кроме того, через них лежит путь к решению некоторых экстремальных задач, в особенности, изопериметрических задач и задач на условный экстремум. Для построения новых операторов предлагается использовать подход, основанный на симметрировании исходного оператора. При этом под симметрированием понимается выявление скрытой симметрии оператора либо выделение его симметричных компонент.

В линейной алгебре и теории операторов существуют мультипликативная и аддитивная процедуры выделения симметричных частей линейных операторов. В них используется представление оператора в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих, а также полярное разложение. Далее показывается, что для линейных динамических систем обе процедуры могут быть выполнены с помощью так называемого флип-оператора, осуществляющего переход к обратному времени. Этим обеспечивается простота их технической реализации. Комбинирование результатов позволяет получить на основе исходного оператора, например, оператора свертки, семейство линейных операторов, обладающих разными типами симметрии.

2.2. Поиск симметричных или самосопряженных частей

Наиболее глубокие результаты теории операторов получены для самосопряженных систем. Это объясняется тем, что они обладают высокой степенью симметрии, характеризуемой равенством $A = A^*$. Многие операторы, возникающие при исследовании линейных динамических систем, не являются симметричными в указанном классическом смысле. Типичным примером служит оператор свертки, а также операторы управления и наблюдения. Поэтому представляет интерес задача симметрирования этих операторов, т.е. перехода от них к симметричным или самосопряженным операторам, сохраняющим те или иные свойства исходных операторов.

Сначала остановимся на мультипликативном подходе к выделению симметричной части линейного оператора. Он опирается на хорошо известное полярное разложение операторов согласно формуле

$$A = H_1 O_1 = O_2 H_2, \quad (2.2.1)$$

где A – исходный оператор, O_1 и O_2 – ортогональные (изометрические) операторы, H_1 и H_2 – симметричные или самосопряженные операторы.

Указанные операторы могут быть найдены из соотношений $H_1^2 = A A^*$; $H_2^2 = A^* A$; $O_1 = H_1^{-1} A$; $O_2 = A H_2^{-1}$. Симметричные операторы H_1 и H_2 наследуют ряд важных свойств оператора A , в частности имеют те же сингулярные числа (и, следовательно, спектральные нормы), а их сингулярные функции связаны простой зависимостью. Заметим, что если не требовать положительной определенности H_1 , H_2 , то указанное разложение не единственно, т.е. существует много полярных разложений одного и того же оператора (по числу квадратных корней из самосопряженных операторов $A A^*$ и $A^* A$). Проиллюстрируем этот подход на примере оператора свертки S , когда линейный стационарный объект описывается формулой

$$y(t) = S u(t) = \int_0^t q(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.2.2)$$

где S – оператор свертки; $q(t)$ – его импульсная весовая функция; $u(t), y(t) \in L_2(0, T)$ – входные и выходные скалярные сигналы, определенные на ограниченном интервале $t \in (0, T)$.

Анализ операторов системы упрощается после приведения уравнений динамического объекта к дискретной матричной форме $\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{u}$, где векторы $\mathbf{u}(t) = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_N)]^T$ и $\mathbf{y}(t) = [y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_N)]^T$ содержат выборки входного и выходного сигналов, взятые с шагом h ; $t_0 = 0$, $t_N = T$, $h = T/N$. Ненулевые элементы матрицы \mathbf{Q} пропорциональны отсчетам импульсной весовой функции $q(t)$

$$\mathbf{Q} = h \begin{pmatrix} q(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ q(t_1) & q(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q(t_N) & q(t_{N-1}) & \dots & q(t_0) \end{pmatrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} \blacksquare \end{matrix} \\ \end{matrix} \quad (2.2.3)$$

В таком случае оператор свертки представлен нижнетреугольной матрицей \mathbf{Q} с одинаковыми элементами на каждой из диагоналей. Тем самым данная матрица является теплицевой и, следовательно, симметричной относительно побочной диагонали. Среди различных полярных разложений теплицевых матриц есть одно особенно простое. Структура его ясна из следующего утверждения.

Любая вещественная теплицева матрица может быть представлена в виде произведения ганкелевой и перестановочной матриц, причем ганкелева получается путем вращения теплицевой на 90 градусов, а перестановочная – путем вращения единичной на 90 градусов.

Например, для матрицы $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ существуют левые полярные

разложения со следующими матрицами \mathbf{H}_1 :

$$\begin{bmatrix} 0,6487 & 0,5425 & 0,5338 \\ 0,5425 & 1,4537 & 1,6101 \\ 0,5338 & 1,6101 & 3,3351 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,3252 & 0,8414 & 0,4316 \\ 0,8414 & 1,1774 & 1,7046 \\ 0,4316 & 1,7046 & 3,3027 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -0,3235 & 0,2989 & 0,8978 \\ 0,2989 & 0,7237 & 2,0945 \\ 0,8978 & 2,0945 & 2,9677 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Все они симметричны, но лишь последняя из них является ганкелевой и совпадает с исходной с точностью до вращения. Заметим, что она не положительно определена.

Ей отвечает перестановочная матрица $\mathbf{O}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Соответствующие представления для оператора свертки имеют вид $S = H_1 F = F H_2$, где F – оператор, осуществляющий перенумерацию отсчетов сигнала в обратном порядке; H_1 и H_2 – симметричные операторы ганкелева типа, матрицы их дискретного представления имеют вид

$$H_1 = \begin{array}{|c|} \hline \text{[Matrix representation of } H_1 \text{]} \\ \hline \end{array}, \quad H_2 = \begin{array}{|c|} \hline \text{[Matrix representation of } H_2 \text{]} \\ \hline \end{array}.$$

Технически реализацию указанных ганкелевых операторов можно осуществить, добавляя ко входу или к выходу динамической системы блок, реализующий оператор зеркального отображения функции во времени относительно середины временного интервала $(0, T)$. Этот оператор, осуществляющий переход к обратному времени, будем называть флип-оператором (от англ. flip – разворот) и обозначать как F . Его действие на непрерывный сигнал поясняется рис. 2.2.1.

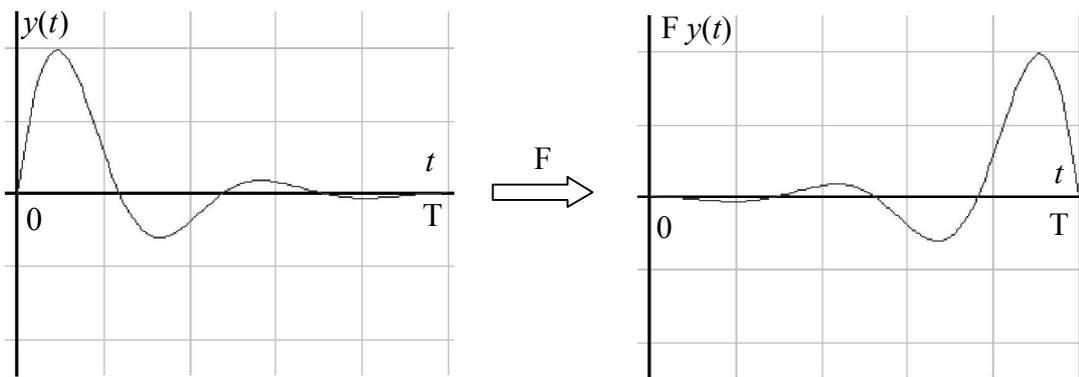


Рис. 2.2.1. Действие флип-оператора на непрерывный сигнал.

Целесообразность рассмотрения ганкелевых операторов H_1, H_2 поясним на следующем примере.

Рассмотрим на множестве линейных систем отношение изометрической эквивалентности, а именно, будем считать две системы S_1 и S_2 изометрически эквивалентными, если их операторные нормы совпадают. Введенное таким образом отношение обладает свойствами симметричности, рефлексивности и транзитивности, т.е. является отношением эквивалентности

$$S_1 \sim S_2 \Leftrightarrow \|S_1\| = \|S_2\|.$$

Нетрудно убедиться, что системы с операторами H_1 и H_2 изометрически эквивалентны системе S в смысле любой из операторных p -норм, как в конечномерном пространстве R^n , так и бесконечномерных пространствах L_1, L_2, H_∞ . Более того, поскольку действие флип-оператора сохраняет форму непрерывных сигналов с точностью до зеркального отображения, у этих трех операторов будут совпадать (с той же оговоркой) и входные сигналы, на которых достигаются эти нормы. Это означает, что для решения задач, связанных с отысканием норм операторов и экстремальных сигналов, на которых достигаются нормы, можно вместо оператора свертки S использовать симметричные операторы H_1, H_2 , более просто устроенные с точки зрения классической теории операторов.

Оператор свертки является оператором типа Вольтерра с нулевым спектром и на конечном интервале не имеет собственных функций. Для нахождения его сингулярных функций требуется решать двухточечную краевую задачу, доставляющую серьезные трудности уже в случае систем второго порядка. В то же время спектр операторов H_1, H_2 вещественный, а собственные функции ортогональны. Изометрическая эквивалентность операторов H_1, H_2 и S свидетельствует о том, что сингулярные функции оператора свертки совпадают с собственными функциями симметрированных операторов.

Для отыскания собственных функций может быть использован итерационный метод, сущность которого иллюстрирует схема, приведенная на рис. 2.2.2.

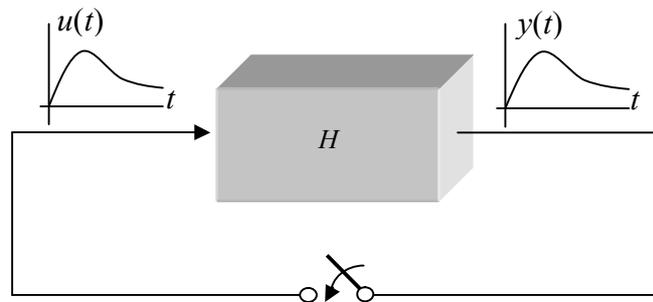


Рис. 2.2.2. Итерационная процедура определения собственных функций.

Согласно схеме, для отыскания собственной функции симметричного оператора H его нормированная реакция $y(t)$ итерационно подается на вход в качестве нового входного сигнала $u(t)$. Через несколько итераций в контуре устанавливается сигнал, соответствующий главной собственной функции оператора (после ее исключения из выходного сигнала можно последовательно найти и остальные собственные функции). Условия сходимости такого итерационного процесса дает теория операторов. В теории матриц аналогичные итерационные процедуры используются для нахождения или уточнения собственных векторов.

2.3. Мультипликативное симметрирование систем

При переходе от оператора свертки к операторам H_1 и H_2 был использован флип-оператор F . Отметим некоторые его свойства. Ближайший матричный аналог флип-оператора, к которому он сводится при дискретизации процессов на входе и выходе системы – это оператор, описываемый матрицей перестановок с единичными элементами на побочной диагонали.

Правое (левое) умножение матрицы перестановок на произвольную матрицу приводит к зеркальному отражению последней относительно вертикальной (горизонтальной) оси, то есть к своеобразному вертикальному или горизонтальному “транспонированию”.

Флип-оператор обладает целым рядом специальных свойств: он симметричен $F = F^*$, ортогонален $F^* = F^{-1}$ и инволютивен $F^2 = E$, где E – тождественный оператор. Отсюда вытекает, что собственные числа флип-оператора вещественны и по модулю равны единице, то есть его спектр сосредоточен в точках ± 1 . Множество собственных функций флип-оператора, отвечающих собственным числам $+1$, образовано всеми функциями, заданными на интервале $(0, T)$ и симметричными (четными) относительно середины этого интервала, а множество собственных функций, отвечающих собственным числам -1 , образовано всеми кососимметричными (нечетными) функциями. В конечномерном случае число четных собственных векторов равно или больше на единицу числа нечетных.

Флип-оператор допускает экспоненциальное представление вида $F = e^{i\Phi}$, где симметричный оператор Φ определяется формулой $\Phi = \pi(E - F)/2$. Матрица дискретного представления оператора Φ имеет крестообразную структуру – все ее ненулевые элементы расположены на главной и побочной диагоналях. В силу изометричности флип-оператор не меняет энергии преобразуемых сигналов, а также их классических норм. Это качество позволяет образовывать с помощью флип-оператора F эквивалентные по норме комбинированные операторы типа FS, SF, FSF .

Заметим, что к операторам, изометрически эквивалентным исходному, относится и сопряженный оператор. В связи с этим возникает вопрос, а не находится ли среди комбинированных операторов, изометрически эквивалентных оператору свертки S , сопряженный оператор S^* . В общем случае это не так. Однако для линейных стационарных динамических систем ответ оказывается положительным: использование двух флип-операторов (на входе и

на выходе объекта) преобразует оператор свертки в сопряженный ему оператор, т.е. имеет место операторное равенство

$$S^* = FSF. \quad (2.3.4)$$

Отметим, что возможность такого простого представления оператора S^* обусловлена наличием внутренней симметрии, присущей оператору свертки линейной стационарной динамической системы. Эта симметрия носит теплицев характер и хорошо видна из структуры матрицы Q (2.2.3).

Следуя терминологии работы [127], мы имеем здесь дело с так называемой скрытой симметрией. В случае матриц обычная симметрия вводится с помощью операции транспонирования $A = A^T$. Если же это равенство выполняется с точностью до перестановки столбцов, то такая симметрия называется скрытой. В нашем случае матрица Q^T может быть получена из матрицы Q перестановкой столбцов в обратном порядке (“транспонированием” относительно вертикальной оси).

Из формулы (2.3.4) вытекает простой путь получения реакции сопряженного объекта на известное входное воздействие, при котором знание математического описания объекта, в принципе, не требуется.

Его реализация в составе более сложного комбинированного оператора иллюстрируется схемой, показанной ниже на рис. 2.4.1. Через u и y на ней обозначены входной и выходной сигналы исходного объекта, через v и w – соответствующие сигналы сопряженного объекта.

Опираясь на эту схему можно строить вычислительные алгоритмы и проводить реальные эксперименты с физическим объектом.

Приведенная на рис. 2.3.1 диаграмма характеризует набор комбинированных операторов, получаемых путем умножения оператора свертки на флип-оператор, и указывает тип их симметрии.

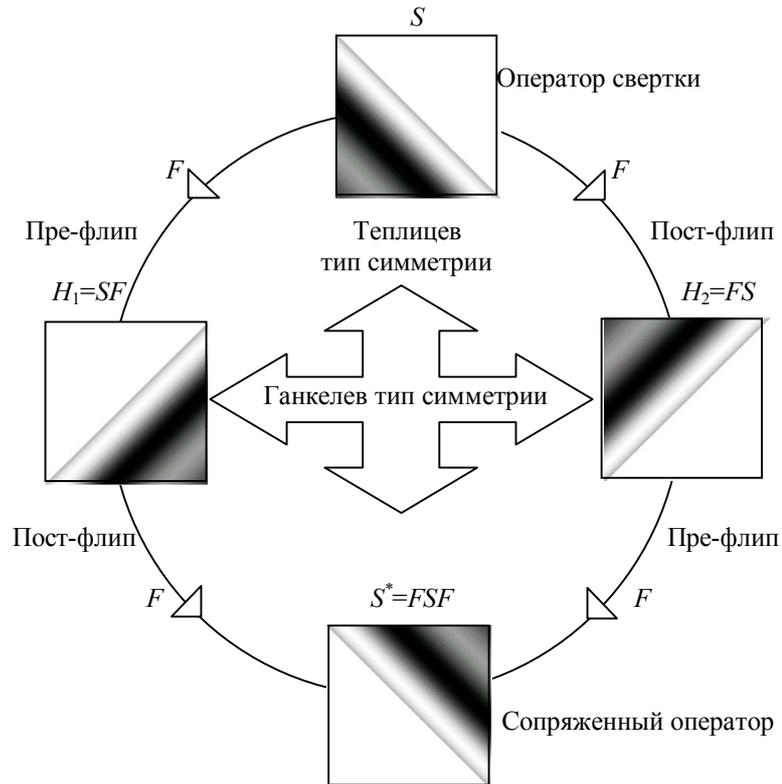


Рис. 2.3.1. Взаимосвязь комбинированных операторов.

Аналогичным образом могут быть получены комбинированные операторы и для других видов исходных операторов.

2.4. Аддитивное симметрирование систем

Альтернативный подход к выделению симметричной части произвольного линейного оператора основан на представлении его в виде суммы симметричной M и кососимметричной K частей. Применительно к оператору свертки указанное разложение имеет вид

$$S = M + K, \quad M = (S + S^*)/2, \quad K = (S - S^*)/2. \quad (2.4.1)$$

Перепишем последние равенства с учетом формул, приведенных на диаграмме рис. 2.3.1:

$$M = (S + FSF)/2, \quad K = (S - FSF)/2. \quad (2.4.2)$$

Эти формулы указывают путь практической реализации симметричной и кососимметричной частей оператора свертки. Структурная реализация оператора M поясняется рис. 2.4.1. Через u и y на ней обозначены входной и выходной сигналы исходного объекта, через v и w – соответствующие сигналы сопряженного объекта.

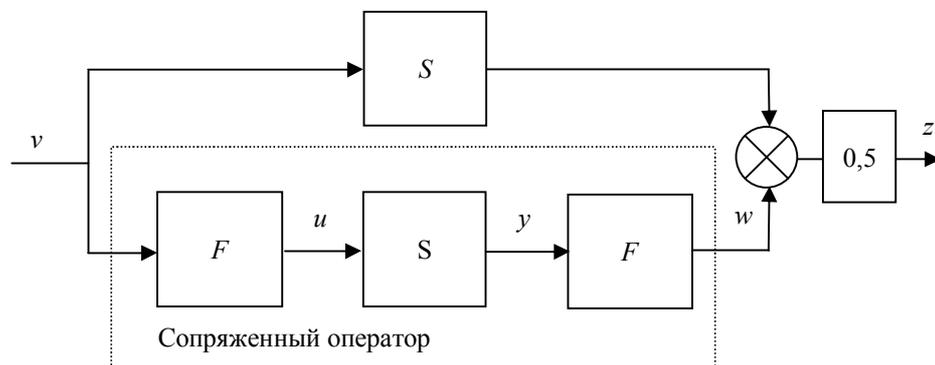


Рис. 2.4.1. Реализация комбинированного оператора M .

Для структурной реализации оператора K сумматор на рис. 2.4.1 следует заменить вычитающим устройством.

Отметим, что наряду с операторами M и K высокой степенью симметрии обладают операторы $FM = (FS + SF)/2$ и $FK = (FS - SF)/2$, последний из которых имеет структуру скобки Пуассона операторов F и S .

Оператор M возникает, в частности, при исследовании оптимизационной задачи о минимальном искажении. В ней требуется найти сигнал $u(t)$, форма которого при прохождении через данную систему претерпевает наименьшие искажения. Можно показать, что искомый сигнал совпадает с главной собственной функцией оператора M [20].

Формула (2.4.2), описывающая традиционное разложение $S = M + K$, использует симметрию и кососимметрию составляющих относительно главной диагонали матриц дискретного представления операторов.

Другие разложения можно получить, выделяя симметричные и кососимметричные части матриц относительно вертикальной и горизонтальной осей, а также относительно побочной диагонали.

$$S = M_1 + K_1, \quad S = M_2 + K_2, \quad S = M_3 + K_3. \quad (2.4.3)$$

Учитывая, что вертикальное и горизонтальное “транспонирование” оператора обеспечивается его умножением справа или слева на оператор F , можем записать:

$$M_1 = (S + SF)/2, \quad K_1 = (S - SF)/2, \quad M_2 = (S + FS)/2, \quad K_2 = (S - FS)/2. \quad (2.4.4)$$

Вследствие треугольной теплицевой структуры оператора свертки, третье из разложений (2.4.3) оказывается тривиальным $M_3 = S$, $K_3 = 0$, однако оно будет более содержательным для нестационарных систем.

Формулы (2.4.2) и (2.4.4) вводят в рассмотрение различные полусуммы и полуразности операторов S , FS , SF , FSF . Изложенный аддитивный подход к симметрированию оператора свертки иллюстрируется рис. 2.4.2.

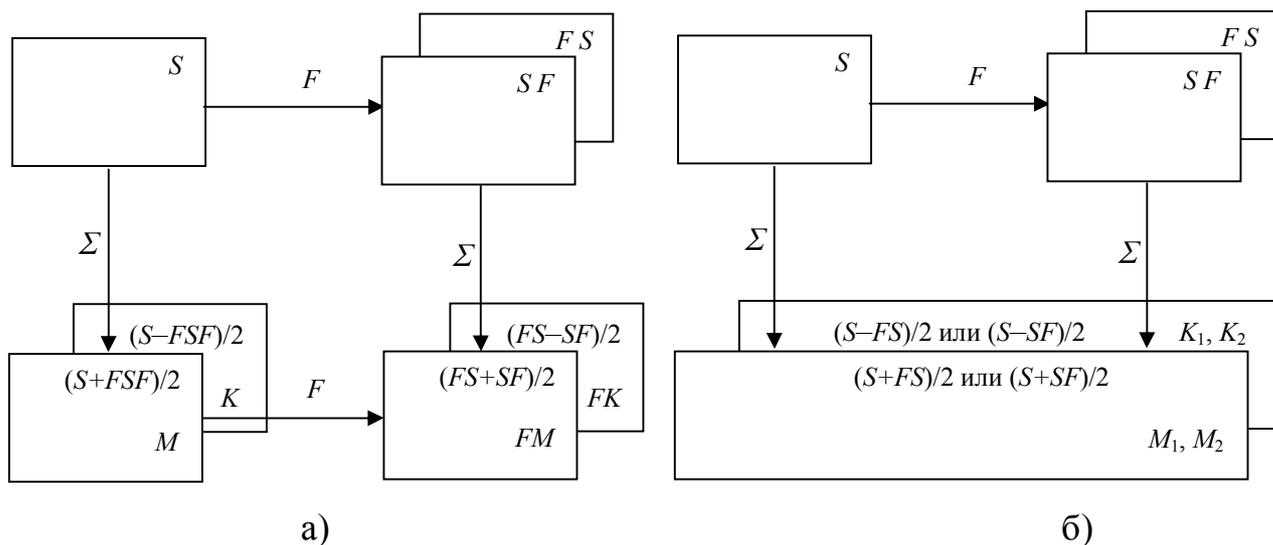


Рис. 2.4.2. Аддитивное симметрирование: а – диагональное, б – вертикально-горизонтальное.

Структура матриц представления операторов показана на рис. 2.4.3.

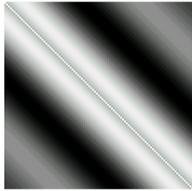
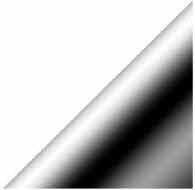
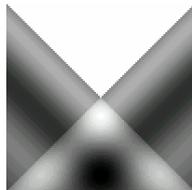
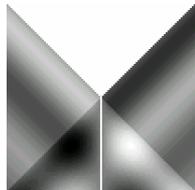
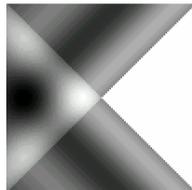
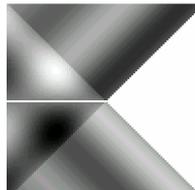
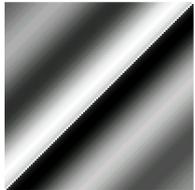
S  ОПЕРАТОР СВЕРТКИ	$M = (S+S^*)/2$  СИММЕТРИЧНАЯ ЧАСТЬ S	$K = (S-S^*)/2$  КОСОСИММЕТРИЧНАЯ ЧАСТЬ S
$H_1 = SF$  ПРЕ-ФЛИП	$M_1 = (S+SF)/2$  	$K_1 = (S-SF)/2$ 
$H_2 = FS$  ПОСТ-ФЛИП	$M_2 = (S+FS)/2$  	$K_2 = (S-FS)/2$ 
$S^* = FSF$  СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР	$FM = (FS+SF)/2$  	$FK = (FS-SF)/2$  СКОБКА ПУАССОНА

Рис. 2.4.3. Структура матриц дискретного представления семейства операторов, порождаемых оператором свертки S .

В первом столбце представлены операторы с треугольной структурой, получаемые мультипликативным симметрированием. Во втором и третьем столбцах находятся симметричные и кососимметричные операторы разных типов, получаемые аддитивным симметрированием. Рис. 2.4.3 наглядно демонстрирует наличие четырех типов симметрии операторных матриц – два диагональных, вертикальный и горизонтальный (они совпадают с четырьмя классическими осями симметрии квадрата). Отметим, что два из приведенных операторов M и FM обладают двойной симметрией, а операторы K_1 и K_2 , напротив, не имеют осей симметрии, но имеют оси кососимметрии.

Перечень операторов, с указанием структуры – теплицева (T) или ганкелева (Γ), а также осей симметрии – горизонтальная (X), вертикальная (Y), главная диагональ (D_1), побочная диагональ (D_2) – приведен в табл. 2.4.1. Знаки $+$ и $-$ означают тип симметрии относительно соответствующей оси (симметричность или кососимметричность).

Таблица 2.4.1. Свойства операторов.

Оператор	S	H_1	H_2	S^*	M	K	FM	FK	M_1	K_1	M_2	K_2
Структура	T	Γ	Γ	T	T	T	Γ	Γ	$-$	$-$	$-$	$-$
Ось симметрии	$+D_2$	$+D_1$	$+D_1$	$+D_2$	$+D_1$ $+D_2$	$-D_1$ $+D_2$	$+D_1$ $+D_2$	$+D_1$ $-D_2$	$+Y$	$-Y$	$+X$	$-X$

Список полученных операторов может быть продолжен за счет их умножения на флип-оператор и линейного комбинирования. По существу здесь идет речь об алгебре операторов с двумя образующими. Это открывает единый путь для систематизации операторов, ассоциированных с динамической системой, их изучения и применения для решения прикладных задач. Аналогичным образом могут исследоваться и другие операторы, известные в теории динамических систем, такие как операторы управления, наблюдения и ганкелев оператор.

2.5. Симметрия собственных функций систем

Наряду с изучением симметрии операторов, изображенных на рис.2.4.3, представляет интерес изучение симметрии их собственных функций и симметрия их спектров. Для обзора интересующих нас свойств воспользуемся диаграммами, приведенными на рис. 2.4.2. На них через F , Σ обозначены операторы мультипликативного и аддитивного симметрирования, в блоках приведены части, порождаемые диагональным, горизонтальным или вертикальным симметрированием.

В отношении спектров и собственных функций полученных операторов имеют место следующие факты, полученные компьютерным исследованием:

1) Спектры операторов H_1 и H_2 , выделяемых мультипликативным симметрированием, совпадают, а их собственные функции зеркально симметричны по отношению друг к другу.

2) Модули спектров операторов M и FM , выделяемых аддитивным симметрированием, совпадают, их собственные функции попарно совпадают и распадаются на четные и нечетные относительно середины временного интервала $(0, T)$.

3) Собственные значения оператора FK расположены на вещественной оси симметрично относительно начала координат. Собственные функции ортогональны и попарно зеркально симметричны.

4) Операторы M_1 , K_1 , M_2 , K_2 вырождены, половина их собственных чисел равна нулю.

5) Ненулевые части спектров M_1 , K_1 или M_2 , K_2 в совокупности образуют спектр оператора M , кроме того, M_2 , K_2 наследуют его четные и нечетные собственные функции соответственно.

К особому виду редукции можно отнести разнесение интервалов управления и наблюдения во времени на взаимно непересекающиеся отрезки.

Разнесение интервалов удваивает семейство ассоциированных с линейным динамическим объектом операторов при сохранении указанных признаков симметрии и схем структурной реализации. Упрощение состоит в том, что спектр становится конечным. Именно к этому семейству принадлежит ганкелев оператор, анализ собственных функций которого для односвязных и многосвязных систем представлен в [1].

Анализ видов симметрии позволяет проводить редукцию задачи на поиск норм или собственных функций операторов заменой сложных операторов M, K на более простые M_1, K_1 или M_2, K_2 . Это позволяет заменить сложную схему рис. 2.4.1 более простыми, изображенными на рис. 2.5.1.

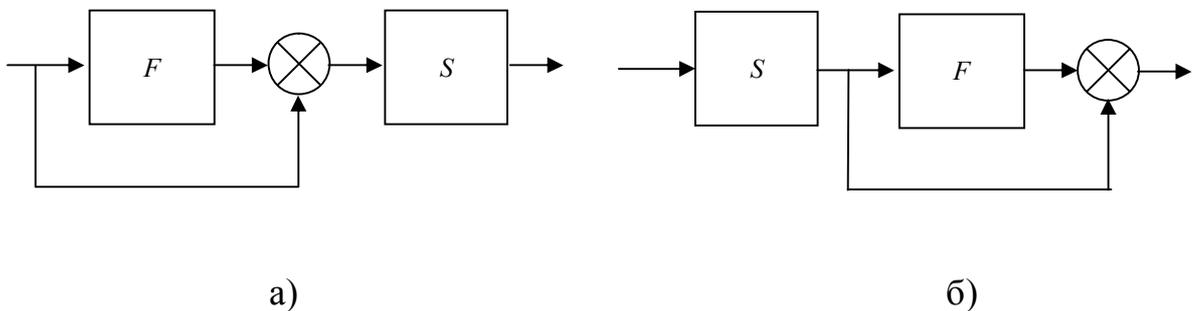


Рис. 2.5.1. Симметрирование: а – по входу, б – по выходу.

Эти схемы отличаются от реализаций операторов H_1, H_2 только дополнительной связью, симметрирующей входные или выходные сигналы. Все они могут быть использованы в итерационном методе поиска собственных функций и собственных значений, поясняемом рис. 2.2.2.

Итерационный поиск проводится дважды с заменой сумматора на вычитающее устройство. Помимо выгод в простоте структурной реализации, эта декомпозиция позволяет находить условный экстремум на классах четных и нечетных функций.

2.6. Примеры экспериментов с симметричными операторами систем

Проиллюстрируем процедуры моделирования и анализа операторов, ассоциированных с линейной динамической системой, на примере электрического фильтра, изображенного на рис. 2.6.1. Передаточные функции этой схемы от входа E к выходам U , I имеют вид

$$Q_1(p) = \frac{R}{RLC p^2 + Lp + R}; \quad Q_2(p) = \frac{RCp + 1}{RLC p^2 + Lp + R}.$$

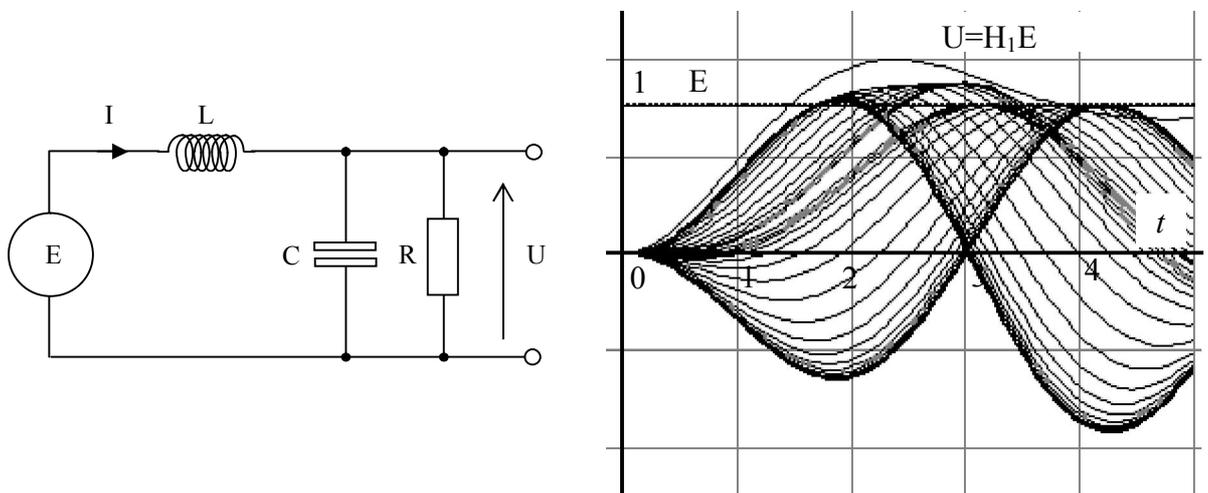


Рис. 2.6.1. Поиск главной собственной функции оператора H_1 для RLC-цепи.

По отношению к этой динамической системе решались задачи по определению реакции операторов на стандартное входное воздействие и отыскание оптимальных сигналов, имеющих ясную физическую интерпретацию расходов энергии на активном сопротивлении и в нагрузке источника.

Эксперимент 1.

Для нахождения формы входного сигнала, обеспечивающего максимальную отдачу энергии источника в активную нагрузку R за время 5 с., определялась главная собственная функция оператора H_1 при значениях параметров $R=2$, $L=1$, $C=0,5$.

С этой целью была использована итерационная процедура рис. 2.2.2 для передаточной функции $Q_1(p)$.

Графики сигналов, полученные на последовательных итерациях, приведены на рис. 2.6.1, справа. Итерационно получаемые сигналы достаточно быстро сходятся к оптимальному сигналу, отвечающему максимальному по модулю собственному значению $\lambda_1 = -1,208$.

Инвертирование сигнала на соседних итерациях происходит вследствие отрицательности этого числа. В данном примере искомая собственная функция обеспечивает максимизацию величины скалярного произведения $\langle U, U \rangle$.

Эксперимент 2.

Операторы $H_1, H_2, S^*, M, K, M_1, K_1, M_2, K_2$, ассоциированные с оператором свертки S данной схемы, моделировались в пакете MATLAB. В качестве входного сигнала E использовался один период прямоугольной волны (меандра) единичной амплитуды длительностью 50 с. Реакция U на этот сигнал при значениях параметров $R=1,2$, $L=1$, $C=0,5$ приведена на рис. 2.6.2.

Эксперимент 3.

Для нахождения формы входного сигнала, обеспечивающего максимальную отдачу энергии источника в цепь за то же время, определялась главная собственная функция оператора M при тех же значениях параметров. Итерационная процедура проводилась для передаточной функции $Q_2(p)$ согласно реализации M по рис. 2.4.1.

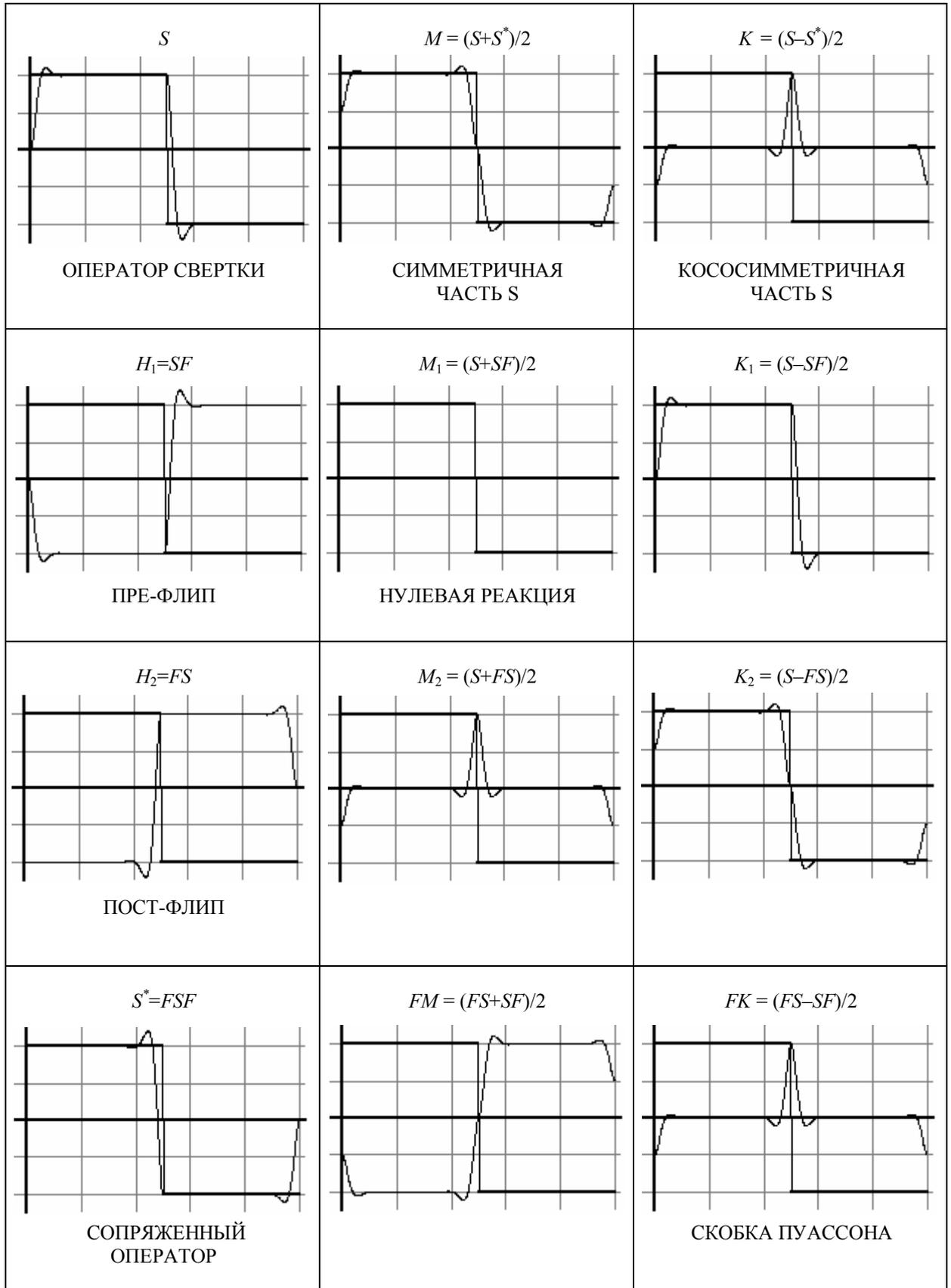


Рис. 2.6.2. Реакция симметризованных операторов на меандр.

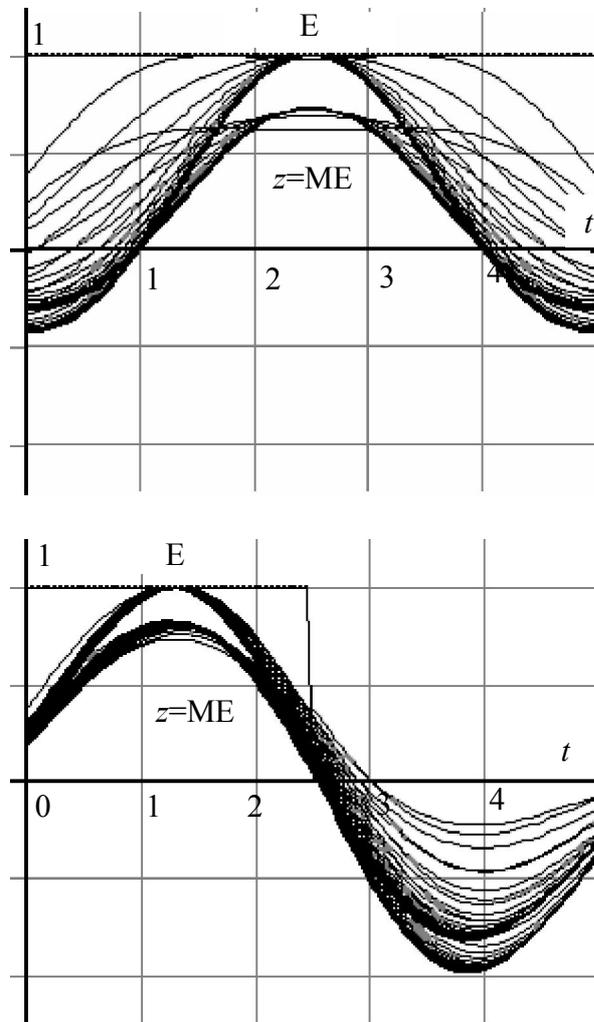


Рис. 2.6.3. Поиск четной и нечетной собственных функций оператора M для RLC-цепи.

У оператора M имеются два близких по модулю собственных числа $\lambda_1 = 0,867$ и $\lambda_2 = 0,773$, которым соответствуют нечетная и четная собственные функции $f_1(t)$, $f_2(t)$. Поэтому использование в качестве начального приближения симметричного входного сигнала ведет к установлению собственной функции $f_2(t)$ (левая часть рис. 2.6.3), использование несимметричного входного сигнала приводит к главной собственной функции $f_1(t)$ (правая часть рис. 2.6.3). Аналогичные результаты получаются при редукции задачи использованием более простых операторов M_2 , K_2 (рис. 2.5.1), отвечающих расщепленному спектру M . В данном примере искомая собственная функция обеспечивает максимизацию величины скалярного произведения $\langle E, I \rangle$.

2.6. Выводы

Настоящий раздел является логическим продолжением первого раздела и вводит в рассмотрение более широкий круг операторов, порождаемых линейной динамической системой. Указаны некоторые принципы, позволяющие их систематизировать, в зависимости от симметрии.

Операторы, ассоциированные с линейной динамической системой, могут обладать различными видами симметрии: обычная симметрия и кососимметрия (симметрия относительно главной диагонали), симметрия и кососимметрия относительно побочной диагонали, симметрия и кососимметрия относительно вертикальной и горизонтальной осей, ганкелева и теплицева симметрии, симметрия собственных функций и спектра.

Использование симметричности операторов позволяет в ряде случаев упростить решение экстремальными итерационными методами изопериметрических задач, задач на нахождение норм операторов, задач на определение собственных функций и спектров и т.д. В ряде случаев упрощение следует из симметрии самих собственных функций, из совпадения части спектра сложного оператора со спектром оператора, для которого проще устроить натуральный эксперимент с объектом, математическое описание которого неизвестно. На практике это приводит к существенному выигрышу: к уменьшению общего времени на эксперимент, к увеличению точности находимых данных и т.д.

Недостатком данного экспериментального подхода, опирающегося на выявленные свойства операторов, является отсутствие сколько-нибудь серьезного аналитического описания искомого спектра. На устранение этого недостатка нацелена следующая глава работы.