

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Спектральные характеристики на ограниченном интервале времени

Спектральные свойства линейных операторов динамических систем широко используются в задачах анализа и синтеза регуляторов. К числу наиболее значимых результатов относятся частотный критерий устойчивости, синтез корректирующих звеньев по логарифмическим частотным характеристикам и др. Несмотря на достигнутое, эта сфера продолжает расширяться. Так, сравнительно недавно, возникли методы редукции моделей динамических систем на основе сингулярных чисел ганкелева оператора и методы синтеза H_∞ -оптимальных регуляторов на основе сингулярных чисел передаточной функции. В теории динамических систем, в частности, в теории управления, спектральные характеристики линейных операторов обычно рассматривают на неограниченном интервале времени протекания процессов. Подобные идеализации упрощают математический аппарат, однако нередко это происходит в ущерб содержательной стороне его применения.

Глава посвящена изучению спектральных характеристик оператора свертки на конечном интервале времени $(0, T)$. Предпочтение отдается частотному подходу. Частотный подход играет особую роль в теории управления. Амплитудно-частотная (АЧХ) и фазовая (ФЧХ) характеристики динамических объектов широко используются при решении задач анализа и синтеза систем управления. Однако все они отвечают бесконечному интервалу времени приложения воздействия, тогда как реальные системы работают конечное время. Возникает естественное желание ввести аналоги частотных характеристик на ограниченном интервале времени и выяснить их связь с классическими. Содержательный ответ на этот вопрос можно получить в терминах спектральных характеристик оператора свертки.

В главе показывается, что сингулярные числа оператора свертки, рассматриваемого на интервале длительности T , образуют дискретное множество, точки которого расположены на классической непрерывной АЧХ. Чем протяженнее интервал T , тем плотнее будут линии дискретного операторного спектра. Указанная закономерность нетривиальна и не повторяет во всех деталях соотношения дискретного и непрерывного спектров сигналов, известного в теории преобразования Фурье. В отличие от теории сигналов, при переходе от бесконечного интервала времени к конечному спектр хотя и становится дискретным, но его отсчеты на оси частот не становятся регулярными. В отношении спектральных характеристик оператора свертки исследуются три основные задачи.

Первая из них состоит в получении характеристического уравнения (или совокупности уравнений) для сингулярных чисел оператора свертки. Соответствующий конечномерный аналог в матричном исчислении содержит полином, здесь это будет уже трансцендентная функция, имеющая бесконечное (счетное) количество нулей.

Вторая задача связана с поиском аналитических соотношений между сингулярными числами и сингулярными функциями. В теории матриц известно немного примеров, в которых компоненты собственных векторов явным образом выражаются через собственные значения. В частности, известно, что для матрицы Фробениуса собственные векторы образуют матрицу Вандермонда из собственных чисел. Тем более интересно отыскать такого рода соотношения для бесконечномерных задач.

Третья задача состоит в поиске характеристик сингулярных функций оператора свертки и установлению их связи с классическими. Континуальность сингулярных функций не отвергает возможности описания их конечным набором коэффициентов. Так, например, весовая функция скалярной системы полностью характеризуется $2n$ параметрами (где n – порядок системы), которые можно связать с коэффициентами передаточной функции.

Сингулярную функцию можно рассматривать как модель динамической системы, раскрывающую ее пропускные способности на конечном интервале времени. Так же, как и любая другая функция времени, она имеет амплитудный спектр Фурье. Частоты сингулярной функции, т.е. ее парциальный спектр, связаны с топологическими особенностями АЧХ. Заметим, что на топологию АЧХ опирается анализ устойчивости систем по Найквисту, так что развиваемый подход вполне лежит в русле традиций теории моделирования динамических систем.

Тем самым, исследование разбивается на три этапа: изучение качественных закономерностей, отличающих спектральные характеристики линейных динамических систем на ограниченном интервале времени; изучение парциальных частот гармонических компонент сингулярных функций и их локализация (подобно кругам Гершгорина, только не для спектра оператора, а для парциального спектра сингулярных функций); разработка численных алгоритмов и графоаналитических методов нахождения спектральных характеристик.

Глава состоит из пяти разделов. В разделе 3.2 вводятся необходимые математические модели и дается определение сингулярных функций оператора свертки на конечном интервале времени. В разделе 3.3 устанавливаются важные свойства симметричности сингулярных функций и другие качественные характеристики, облегчающие нахождение их аналитического описания. Раздел 3.4 посвящен поиску сингулярных функций на основе частотного подхода, при этом важную роль играет флип-оператор, введенный в работах [19, 20].

Подчеркивая актуальность и новизну исследования, отметим, что в литературе по теории динамических систем наблюдается недостаток сведений по затрагиваемым вопросам. Импульсные и переходные функции элементарных динамических звеньев рассматриваются в учебниках, тогда как собственные и сингулярные функции линейных операторов тех же объектов известны недостаточно полно.

3.2. Сингулярные функции систем

Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему с одним входом и одним выходом, описываемую уравнениями в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t),\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^n$ – вектор состояния, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – постоянные матрицы соответствующих размерностей; $u(t)$, $y(t)$ – входной и выходной скалярные сигналы, начальное состояние $\mathbf{x}(0)=0$, $0 \leq t \leq T$.

Оператор свертки S характеризует отображение множества входных сигналов, воздействующих на систему на интервале времени $(0, T)$, в множество выходных сигналов, рассматриваемых на том же самом интервале. Он задается формулой

$$y(t) = S u(t) = \int_0^t q(t - \tau)u(\tau)d\tau,\tag{3.2.2}$$

где $q(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ – импульсная весовая функция односвязной динамической системы с передаточной функцией $Q(p)$.

Оператор свертки S отвечает режиму работы системы в реальном времени, типичному для большинства задач теории автоматического управления и теории электрических цепей. Сопряженный оператор S^* вводится стандартным образом с помощью соотношения $(v, Su) = (S^*v, u)$, где скобки означают скалярное произведение соответствующих функций, рассматриваемых на интервале $(0, T)$.

Оператор S^* представляет собой оператор свертки сопряженной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\dot{\zeta}(t) &= \mathbf{A}^T \zeta(t) + \mathbf{C}^T v(t), \\ \tilde{y}(t) &= \mathbf{B}^T \zeta(t), \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

где $v(t)$, $\tilde{y}(t)$ – входной и выходной скалярные сигналы, начальное условие зависит от вида входного сигнала $v(t)$ и определяется формулой

$$\zeta(0) = -\int_0^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T v(t) dt, \text{ конечное значение } \zeta(T) = 0.$$

Интегральное представление оператора S^* имеет вид

$$\tilde{y}(t) = S^* v(t) = \tilde{y}_0 + \int_0^t q^*(t-\tau) v(\tau) d\tau, \quad (3.2.4)$$

где $q^*(t) = \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T (T-t)} \mathbf{C}^T$ – импульсная весовая функция сопряженной системы. Начальное значение \tilde{y}_0 рассчитывается из условия $y(T) = 0$ и равно

$$\tilde{y}_0 = -\int_0^T q(t) v(t) dt. \text{ Для скалярных систем справедливо равенство } q^*(t) = q(T-t).$$

В инверсном направлении времени $\tau = T-t$ уравнения сопряженной системы совпадают с уравнениями дуальной системы:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(\tau) &= \mathbf{A}^T \zeta(\tau) + \mathbf{C}^T v(\tau), \\ \tilde{y}(\tau) &= \mathbf{B}^T \zeta(\tau). \end{aligned}$$

Линейные стационарные динамические системы с одним входом и выходом самодуальны в том смысле, что их вход-выходные характеристики (весовая и передаточная функции) совпадают с соответствующими характеристиками дуальных систем.

Описаниям (3.2.1) и (3.2.3) исходной и сопряженной систем при нулевых начальных условиях соответствуют дробно-рациональные передаточные функции

$$Q(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{b(p)}{a(p)} \quad \text{и} \quad Q^*(p) = \mathbf{C}(-p\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = Q(-p) = \frac{b(-p)}{a(-p)}, \quad (3.2.5)$$

являющиеся изображениями по Лапласу соответствующих импульсных весовых функций. При этом следует различать сопряженную передаточную функцию $Q(p^*)$ системы S и передаточную функцию $Q^*(p)$ сопряженной системы S^* . Они совпадают друг с другом только в частном случае гармонических входных сигналов, когда $p = j\omega$.

Кроме перечисленных, в работе используется оператор F зеркального инвертирования во времени функции $f(t)$, заданной на интервале $(0, T)$. Он описывается зависимостью

$$F f(t) = f(T-t). \quad (3.2.6)$$

Следуя терминологии работы [19], будем называть его флип-оператором. Его спектральные свойства и значение в теории динамических систем освещены в [20]. Флип-оператор обладает рядом специальных свойств: он симметричен $F = F^*$, ортогонален $F^* = F^{-1}$ и инволютивен $F^2 = I$, где I – тождественный оператор. Отметим также нетривиальное представление сопряженного оператора в виде $S^* = FSF^*$. Оно означает, что в случае стационарных систем пара операторов S^* , S связана преобразованием подобия со всеми вытекающими отсюда последствиями. Относительная простота описания флип-оператора во временной области вовсе не означает такой же простоты в частотной. Этот вопрос подробнее рассматривается в разделе 3.4.

Предметом исследования настоящей главы служат спектральные свойства операторов динамической системы (3.2.1), и, в первую очередь, сингулярные числа и сингулярные функции оператора свертки (3.2.2) на конечном интервале времени.

Приведем необходимые математические определения. В случае матричных операторов собственные и сингулярные числа отыскиваются из характеристических уравнений вида $|S - \lambda I| = 0$, $|S^*S - \sigma^2 I| = 0$. Аналогичные уравнения возникают при дискретном описании динамики линейных систем матрицами на конечном интервале времени.

Переходя от матриц к непрерывным динамическим системам, отметим следующее.

Всякая динамическая система с нулевыми начальными условиями, рассматриваемая на конечном или полубесконечном интервале времени, фильтрует входной сигнал, неизбежно меняя его форму. Поэтому ее оператор свертки не имеет собственных функций. Вместе с тем, любой линейный оператор имеет сингулярные функции. Существуют два подхода к определению сингулярных функций операторов.

Согласно первому подходу, помимо оператора S самой системы в рассмотрение вводится сопряженный ему оператор S^* .

Определение 1. Функции $f_i(t)$, $g_i(t)$, удовлетворяющие операторным уравнениям

$$SS^*f_i(t) = \sigma_i^2 f_i(t), \quad S^*Sg_i(t) = \sigma_i^2 g_i(t), \quad (3.2.7a)$$

называются левыми и правыми сингулярными функциями оператора свертки S . Арифметические корни σ_i из коэффициентов пропорциональности в этих равенствах называются сингулярными числами оператора S .

Структурная интерпретация этого определения для левых сингулярных функций иллюстрируется рис. 3.2.1, а.

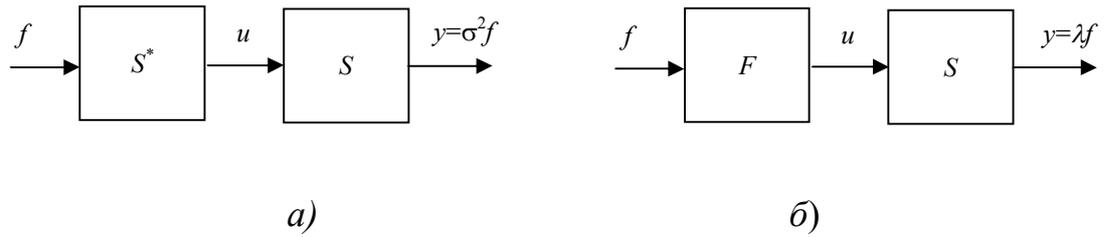


Рис. 3.2.1. Альтернативные варианты определения сингулярной функции оператора свертки: *a)* с помощью оператора сопряженной системы; *б)* с помощью флип-оператора.

В соответствии с ним левой сингулярной функцией $f(t)$ называется ненулевой входной сигнал, проходящий через последовательное соединение систем S^* и S без искажения формы. Схема для правых сингулярных функций выглядит аналогично и получается перестановкой блоков S^* и S .

Отметим, что правые и левые сингулярные функции связаны равенствами

$$S^* f_i(t) = \sigma_i g_i(t), \quad S g_i(t) = \sigma_i f_i(t), \quad (3.2.7b)$$

представляющими собой симметричную запись уравнений (3.2.7a). В приложениях главную роль играют функции $f_1(t)$, $g_1(t)$, отвечающие максимальному сингулярному числу σ_1 , иногда называемые максимизирующей парой Шмидта.

Второй подход к определению сингулярных функций опирается на их экстремальные свойства.

Определение 2. Для заданного оператора S рассмотрим следующую задачу на условный экстремум

$$J = \| S f(t) \| \Rightarrow \text{extr}, \quad \| f(t) \| = 1, \quad (3.2.8)$$

где $\| \bullet \|$ означает норму функции.

Функции $f_i(t)$, отвечающие стационарным точкам этой экстремальной задачи, называются сингулярными функциями оператора S , а соответствующие им значения σ_i функционала J – сингулярными числами оператора S .

Функция $f_1(t)$, доставляющая глобальный максимум функционалу J , называется главной сингулярной функцией. Ей соответствует главное сингулярное число σ_1 , характеризующее максимальный "коэффициент усиления" (в смысле используемой нормы), который может быть реализован данным оператором.

При использовании квадратичной нормы $\|f\|_2 = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^T f(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$,

оба определения приводят к одинаковым результатам. В случае других норм,

например, модульной $\|f\|_1 = \int_0^T |f(t)| dt$ или чебышевской $\|f\|_\infty = \max_t (|f(t)|)$,

определения 1, 2 становятся неэквивалентными.

Далее рассматриваются квадратичные нормы функций и согласованные с ними нормы операторов.

Во избежание терминологической путаницы отметим четыре разновидности спектров, встречающихся в литературе и используемых в данном разделе: это амплитудный спектр сигнала, модальный и операторный спектры динамической системы и парциальный спектр сингулярной функции.

Первая разновидность – *амплитудный спектр сигнала* – широко используется в теории связи и других приложениях. Он получается с помощью преобразования Фурье и характеризует амплитуды гармоник, входящих в состав сигнала.

Вторая разновидность спектра – это *модальный спектр системы*. Под ним понимается совокупность полюсов системы, определяющих модальные составляющие ее свободного движения. Очевидно, что он совпадает со спектром матрицы A описания (3.2.1).

Третья разновидность спектра – это *операторный спектр динамической системы*. В функциональном анализе спектром оператора обычно называется совокупность его собственных значений, соответствующих собственным функциям.

Как отмечалось, оператор свертки собственных функций не имеет. Предметом нашего изучения является спектр симметричного оператора S^*S , образующий для конечномерных систем счетное множество. Поэтому, говоря в дальнейшем об операторном спектре динамической системы, будем иметь в виду именно этот спектр.

Более формально: операторным спектром линейной системы назовем совокупность сингулярных чисел ее оператора свертки (3.2.2), рассматриваемого на интервале времени $(0, T)$. Исходя из общих свойств симметричных операторов, эти числа вещественны, положительны, а сингулярные функции попарно ортогональны.

Четвертая разновидность спектра – *парциальный спектр сингулярной функции*.

Как будет показано ниже, каждая из сингулярных функций оператора свертки динамической системы представляет собой линейную комбинацию конечного числа гармонических сигналов – модальных компонент некоторой динамической системы удвоенного порядка.

Совокупность частот этих компонент будем называть парциальным спектром сингулярной функции.

Операторный и парциальный спектры будут представлять особый интерес нашего анализа. Кроме приведенных выше двух классических походов к определению сингулярных функций возможен еще один, третий. Он основан на специальном свойстве симметрии, присущем сингулярным функциям оператора свертки стационарных скалярных систем и рассматривается в следующем разделе.

3.3. Свойства сингулярных функций

Для изучения свойств сингулярных функций выпишем в соответствии с первым определением систему дифференциальных уравнений порядка $2n$, получаемую путем каскадного соединения исходной и сопряженной систем (рис. 3.2.1, *a*). Для описания такого соединения используем уравнения (3.2.1), (3.2.3), дополненные уравнением связи $u(t) = \tilde{y}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), & y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t), & u(t) &= \tilde{y}(t), \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) &= -\mathbf{A}^T\boldsymbol{\zeta}(t) - \mathbf{C}^T f(t), & \tilde{y}(t) &= \mathbf{B}^T\boldsymbol{\zeta}(t), & f(t) &= y(t)/\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Последнее соотношение имеет место при условии, что в качестве входного сигнала $f(t)$ выступает сингулярная функция системы S , тогда согласно формуле (3.2.7) выходной сигнал $y(t) = SS^*v(t)$ отличается от входного только амплитудой $y(t) = \sigma^2 f(t)$. Матрица пространства состояний \mathbf{M} системы (3.1) имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T\mathbf{C}/\sigma^2 & -\mathbf{A}^T \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Заметим, что похожая матрица возникает при минимизации квадратичного функционала $\int_0^{\infty} (\mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + u(t)^T \mathbf{R} u(t)) dt$ в теории оптимального управления. В самом деле, природы этих задач близки, однако имеются три существенных различия. Во-первых, при поиске сингулярных функций ищется максимум квадратичного функционала, а при поиске оптимального управления – его минимум. Во вторых, матрицы различаются знаком левого нижнего блока (в задачах оптимального управления он положителен). В третьих, в матрице \mathbf{M} имеется неизвестный параметр σ , который должен быть выбран таким образом, чтобы решение системы (3.3.1) удовлетворяло краевым условиям $\mathbf{x}(t) = 0$, $\boldsymbol{\zeta}(T) = 0$.

Указанные различия не мешают использовать при поиске сингулярных функций стандартный математический аппарат, разработанный в теории управления. Он включает составление дифференциального уравнения Риккати и расчет коэффициентов матрицы обратных связей, обеспечивающих оптимальный вид выходных сигналов системы. Аналитические трудности этого пути известны. В теории оптимального управления, где ищется одно решение (и не надо определять сингулярное число σ) уже в случае анализа апериодического звена возникают громоздкие выкладки [92, 107], а при повышении порядка системы аналитические выражения для искомых функций становятся необозримыми. Отметим также, что вариационные методы теории оптимального управления мало согласуются с частотными (и это отдаляет нас от традиционных спектров, т.е. АЧХ и ФЧХ).

От указанных недостатков свободен альтернативный подход к определению сингулярных функций, основанный на использовании специального вида симметрии, присущего оператору свертки и его сингулярным функциям [20]. Суть этой симметрии становится ясной из следующей теоремы.

Теорема 1 (о зеркальной симметрии). Левая и правая сингулярные функции $f_i(t)$ и $g_i(t)$ оператора свертки (3.2.2), отвечающие простому сингулярному числу σ_i и связанные соотношениями (3.2.7b), удовлетворяют условию зеркальной симметрии

$$f_i(t) = \pm g_i(T - t). \quad (3.3.3)$$

Доказательство теоремы 1. Согласно определению 1, правые сингулярные функции оператора свертки g_i удовлетворяют равенствам $S^* S g_i = \sigma_i^2 g_i$.

Используя соотношение $S^* = FSF$, перепишем их в виде

$$FSFS g_i = \sigma_i^2 g_i \text{ или } H^2 g_i = \sigma_i^2 g_i,$$

где $FS=H$ – симметричный оператор, получаемый при полярном разложении оператора свертки.

Обозначим q_i – собственную функцию оператора H , отвечающую его собственному числу λ_i , тогда справедливы равенства: $H q_i = \lambda_i q_i$.

Отсюда заключаем, что сингулярные функции операторов S^*S и H совпадают $g_i = q_i$, а их собственные числа равны с точностью до знака $\lambda_i = \pm \sigma_i$. Следовательно

$$H g_i = \lambda_i g_i, \quad FS g_i = \lambda_i g_i, \quad S g_i = \lambda_i F f_i.$$

С учетом второго из соотношений (3.2.7b), получаем $\sigma_i f_i(t) = \lambda_i g_i(T-t)$ или $f_i(t) = \pm g_i(T-t)$, что и требовалось доказать.

Условие (3.3.3) означает, что левая сингулярная функция с точностью до знака совпадает с копией правой сингулярной функции, взятой в обратном времени.

Приведенная теорема позволяет дать еще одно, третье определение сингулярных функций оператора свертки системы (3.2.1).

Определение 3. Функции $f_i(t)$ и $g_i(t)$, удовлетворяющие операторным уравнениям

$$S f_i(T-t) = \lambda_i f_i(t), \quad S g_i(t) = \lambda_i g_i(T-t), \quad (3.3.4)$$

называются левыми и правыми сингулярными функциями оператора свертки S , отвечающими сингулярному числу $\sigma_i = |\lambda_i|$.

Вещественный коэффициент λ_i , который может быть как положительным, так и отрицательным, будем называть алгебраическим сингулярным числом в отличие от арифметического сингулярного числа σ_i . Далее, из соображений простоты, индекс у сингулярных функций и чисел будем опускать.

Равенства (3.3.4) имеют прозрачную структурную интерпретацию. В частности, первое из них означает, что если на вход системы (3.2.1) подать сигнал, равный левой сингулярной функции $f(t)$, взятой в обратном времени, то на выходе получим усиленный в λ раз сигнал $f(t)$. Это поясняется рис. 3.1.1, б, на котором через F обозначен флип-оператор (3.2.6). Он осуществляет получение зеркальной копии входного сигнала в обратном времени. Таким образом, из определения 3 следует, что сингулярной функцией линейной динамической системы называется входной сигнал, проходящий, после его инверсии во времени, на выход системы без искажения формы.

Отметим, что операция инверсии входного сигнала относительно середины конечного интервала управления (флип-операция) не меняет энергетических соотношений для входных и выходных сигналов. Это позволяет при решении некоторых задач заменять оператор свертки симметричным оператором H , который вводится с помощью факторизации $S = HF$ [20]. Собственные функции оператора H совпадают с сингулярными функциями оператора свертки S . Поскольку квадратичные нормы прямого и сопряженного операторов одинаковы, собственные значения оператора H с точностью до знака равны искомым сингулярным числам.

Перейдем к исследованию свойств сингулярных функций (не находя их в явном виде), опираясь на все три их определения. Необходимость этого диктуется тем, что аналитическая часть задачи очень сложна, и для ее решения полезна качественная информация. Как уже отмечалось, каждая из сингулярных функций линейной системы на бесконечном интервале времени представляет собой синусоиду, т.е. является моногармоническим сигналом.

На конечном интервале времени структура сингулярной функции заметно усложняется и в ее состав входит несколько гармоник различных частот, то есть она становится полигармоническим сигналом. Общее число таких гармоник равно n , а совокупность их частот образует парциальный спектр сингулярной функции. Точнее состав этого спектра описывает следующая теорема.

Теорема 2 (о парциальном спектре). Для минимально-фазовой системы с передаточной функцией $Q(p) = b(p)/a(p)$ правые и левые сингулярные функции оператора свертки представляют собой линейные комбинации конечного числа гармоник $h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t)$.

Вид гармоник, отвечающих сингулярному числу σ , определяется корнями характеристического уравнения

$$\sigma^2 a(p)a(-p) + b(p)b(-p) = 0. \quad (3.3.5)$$

Доказательство теоремы 2. Для системы с передаточной функцией $Q(p) = b(p)/a(p)$ изображения по Лапласу левой и правой сингулярной функций удовлетворяют соотношениям

$$Q(p) Q(-p) f(p) = \sigma^2 f(p), \quad Q(-p) Q(p) g(p) = \sigma^2 g(p).$$

Им соответствует одно и то же характеристическое уравнение для парциального спектра сингулярных функций (3.3.5).

В это уравнение входят только четные степени p , поэтому расположение его корней на комплексной плоскости характеризуется центральной симметрией относительно начала координат. Общее число корней равно $2n$, после их попарного объединения получаем n гармоник, которые входят в состав правых и левых сингулярных функций. Доказательство закончено.

Парам чисто мнимых корней отвечают круговые гармоники $h_i(t) = a_i \sin(\omega t) + b_i \cos(\omega t)$, парам чисто вещественных – гиперболические $h_j(t) = a_j \operatorname{sh}(\omega t) + b_j \operatorname{ch}(\omega t)$, четверкам (квартетам) двоякосимметричных комплексных корней – смешанные $h_s(t) = \operatorname{sh}(\omega_1 t)[a_s \sin(\omega_2 t) + b_s \cos(\omega_1 t)]$ и $h_c(t) = \operatorname{ch}(\omega_1 t)[a_c \sin(\omega_2 t) + b_c \cos(\omega_2 t)]$.

Отметим что вариационные методы, основанные на множителях Лагранжа, приводят к тому же результату, но более длинным путем.

Сингулярное число σ входит в характеристическое уравнение как параметр. Если его значение заранее не известно, то уравнение (3.3.5) не позволяет найти парциальный спектр, однако оно накладывает на этот спектр ряд ограничений качественного характера.

Следствие. Для минимальнофазовых систем с несократимой передаточной функцией в состав парциального спектра не могут входить нули и полюсы исходной системы, нули и полюсы сопряженной системы, а также изолированные экспоненциальные компоненты.

В самом деле, у пар полиномов $(\pm a(p), \pm b(p))$ минимальных минимальнофазовых систем нет общих корней, поэтому корни полиномов $\pm a(p)$ и $\pm b(p)$, т.е. нули и полюсы исходной и сопряженной систем, не могут быть корнями уравнения (3.3.5). Следовательно, гармоники $h_i(t)$ не совпадают с модальными составляющими импульсной весовой функции исходной и сопряженной систем.

Кроме того, сингулярные функции не могут содержать изолированных экспоненциальных членов, поскольку каждому члену вида e^{at} в силу симметрии корней будет отвечать член e^{-at} , вместе они образуют гиперболическую функцию. Отметим, что при наличии кратных корней уравнения (3.3.5) у сингулярной функции будут появляться составляющие, содержащие полиномиальные множители.

Для неминимально-фазовых систем полиномы $a(p)$ и $b(-p)$ могут иметь общие корни. Тогда в сингулярной функции будут присутствовать соответствующие модальные компоненты системы.

Известно, что всякая неминимально-фазовая система может быть представлена в виде последовательного соединения минимально-фазовой системы и фазовращателя. Упомянутые модальные компоненты отвечают его полюсам.

Согласно этому следствию сингулярные функции не имеют изолированных экспоненциальных составляющих, этим они отличны от "свободных" движений системы. Сингулярная функция не содержит модальных составляющих, т.е. не возбуждает их. Некоторую аналогию можно найти во входных сигналах с частотами, отвечающими нулям передаточной функции. Они возбуждают собственные движения объекта, но сами не пропускаются на выход. Сингулярные функции действуют наоборот: они проходят сами, не возбуждая модальных составляющих. Последнее глубокое по содержанию свойство позволяет применить для локализации и анализа гармоник сингулярных функций, определяемых на конечном интервале времени, частотные характеристики (такие, как АЧХ и ФЧХ), определенные для интервалов бесконечной длительности. По сути, это обоснование приемлемости здесь обычного частотного подхода.

В качестве комментария к следствию заметим, что теория оптимального управления связывает вид решения с особенностями гамильтоновой матрицы (3.3.2). Напомним (см. [57]), что матрица \mathbf{M} называется гамильтоновой, если соблюдается равенство $\mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{J} = -\mathbf{M}$, где \mathbf{J} – матрица вида $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}$. Спектр гамильтоновой матрицы обладает свойством: наряду с каждым числом μ он содержит, причем с той же кратностью, число $-\mu$. Иными словами, он содержит двоякосимметричные комплексные числа. В задачах оптимального управления матрица \mathbf{M} не имеет чисто мнимых собственных значений, ровно половина ее спектра принадлежит полуплоскости $\operatorname{Re} \mu < 0$. Тем самым однозначно определено n -мерное инвариантное подпространство, отвечающее устойчивым собственным значениям (в нем расположена оптимальная траектория).

Парциальный спектр сингулярных функций наоборот затрагивает мнимую ось – сказывается знак левого нижнего блока коэффициентов – оставаясь двоякосимметричным. Таким образом, рассматриваемая задача имеет свои особенности.

Определение частот парциальных компонент сингулярной функции, т.е. ее парциального спектра – проблема весьма сложная. Ее решение может облегчить локализация этого спектра на основе следующего свойства. Введем в рассмотрение функцию комплексного переменного $R(p)=Q(p)Q(-p)$. На мнимой оси она совпадает с квадратом обычной АЧХ, а в остальных случаях отличается от нее.

Свойство 1. (Локализация спектра). Парциальный спектр сингулярной функции системы заключен в области комплексной плоскости, ограниченной условиями

$$\text{Im}(R(p)) = 0, \text{ Re}(R(p)) = \sigma^2 \geq 0. \quad (3.3.6)$$

В самом деле, как правые, так и левые сингулярные функции оператора свертки удовлетворяют соотношению $Q(p)Q(-p)f(p) = \sigma^2 f(p)$.

Перейдем от него к операторному равенству $R(p) - \sigma^2 = 0$, где $R(p) = Q(p)Q(-p)$. Учитывая вещественность числа σ , приравняем нулю действительную и мнимую части комплексного выражения $R(p) - \sigma^2$, получим (3.3.6)

Первое из соотношений (3.3.6) свидетельствует об отсутствии фазового сдвига сингулярной функции при прохождении ее через последовательное соединение прямой и сопряженной систем. Смысл второго условия – одинаковый коэффициент усиления всех парциальных компонент, входящих в состав сингулярной функции.

Поясним также физический смысл этих соотношений. В соответствии с первым определением сингулярной функции и видом передаточных функций прямой S и сопряженной S^* систем передаточная функция их последовательного соединения равна $Q(p)Q(-p)$.

Последовательное соединение прямой и сопряженной систем известно в теории как амплитудный фильтр. Он меняет амплитуды гармоник, но оставляет неизменными фазы сигналов, поскольку сопряженная система выступает как фазовый компенсатор. Следовательно, все гармоники проходят через такое соединение с сохранением формы сигнала, усиливаясь одинаково. В итоге, сингулярная функция, проходя через амплитудный фильтр, не искажается по форме, а только умножается на положительный коэффициент σ^2 . В терминах частотного подхода это выражается двумя условиями (3.3.6). Дополнительный пример применения этого свойства будет рассмотрен позже.

Свойство 2 (краевые условия). Левые сингулярные функции оператора свертки системы (3.2.1), отвечающие алгебраическому сингулярному числу λ , удовлетворяют краевым условиям

$$f(0) = 0, \quad \lambda \dot{f}(0) = q(0)f(T), \quad \lambda \ddot{f}(0) = \dot{q}(0)f(T) - q(0)\dot{f}(T), \quad \dots \quad (3.3.7)$$

Запишем, согласно теореме 1, $\lambda f(t) = \int_0^t q(t-\tau)f(T-\tau)d\tau$, где $q(t)$ – импульсная весовая функция системы. Полагая $t=0$, получаем $f(0)=0$, т.е. первое из соотношений (3.3.7). Дифференцируя равенство по времени, получим

$$\lambda \dot{f}(t) = q(0)f(T-t) + \int_0^t \dot{q}(t-\tau)f(T-\tau)d\tau,$$

что после подстановки $t=0$ даст $\lambda \dot{f}(0) = q(0)f(T)$, т.е. второе из соотношений (3.3.7). Выполняя повторное дифференцирование в сочетании с интегрированием по частям, получим третье из соотношений (3.3.7) и т.д.

Возможен также матричный вариант доказательства, основанный на рассмотрении равенств $y=Cx$; $\dot{y}=CAx+CBu$ и других, получаемых их последовательным дифференцированием, для входного сигнала $u=f(t)$. Заметим, что перечисленные краевые условия выписаны с учетом нулевых начальных условий системы.

Эти формулы имеют регулярный вид и могут быть записаны в матричной форме, структуру которой поясним на примере первых четырех условий:

$$\lambda \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \\ \ddot{f}(0) \\ \dddot{f}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ q(0) & 0 & 0 & 0 \\ \dot{q}(0) & q(0) & 0 & 0 \\ \ddot{q}(0) & \dot{q}(0) & q(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(T) \\ -\dot{f}(T) \\ \ddot{f}(T) \\ -\ddot{f}(T) \end{pmatrix}$$

иной вариант записи

$$\lambda \begin{pmatrix} f(0) \\ \dot{f}(0) \\ \ddot{f}(0) \\ \dddot{f}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{CB} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & 0 & 0 \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(T) \\ -\dot{f}(T) \\ \ddot{f}(T) \\ -\ddot{f}(T) \end{pmatrix},$$

удобен при задании уравнений системы в пространстве состояний.

Краевые условия для правых сингулярных функций имеют аналогичный вид и получаются из приведенных путем замены $f(t) = g(T-t)$, например, $g(T) = 0$, $\lambda \dot{g}(T) = q(0)g(0)$, и т.д.

Значения $q(0)=\mathbf{CB}$, $\dot{q}(0)=\mathbf{CAB}$, $\ddot{q}(0)=\mathbf{CA}^2\mathbf{B}$, ... называются марковскими параметрами динамической системы. С их помощью выражается интересное топологическое свойство (сформулируем его для левых сингулярных функций).

Свойство 3 (взаимосвязь параметров). Если начальные значения сингулярных функций нормировать с помощью марковских параметров условием $\dot{f}_i(0) = q(0)$, то их конечные значения "замечают" операторный спектр $f_i(T) = \lambda_i$ (если первая производная равна нулю, то нормируем вторую производную и так далее).

Тем самым, через марковские параметры устанавливается взаимосвязь сингулярных функций и операторного спектра системы. Значение этого свойства для анализа сингулярных функций поясним на простом примере.

Синусоидальные сингулярные функции идеального колебательного звена $\ddot{y} + k^2y = u$, имеют вид $f(t) = \sin(\omega_1 t + \theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\omega_2 t + \theta_2)\sin(\theta_1)$. Из начальных условий следует, что частоты и фазы парциальных составляющих $\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2$ удовлетворяют соотношению

$$\omega_1/\text{tg}(\theta_1) = \omega_2/\text{tg}(\theta_2),$$

инвариантному к номеру сингулярной функции.

Отсюда видно, что знание любых трех параметров сингулярных функций позволяет находить четвертый параметр.

Аналогичное соотношение имеет место для сингулярных функций с гиперболическими компонентами.

Учет таких соотношений позволяет избежать трудоемких выкладок. Сходная ситуация имеет место при анализе устойчивости систем по логарифмическим частотным характеристикам, когда фазовая характеристика попросту не используется. Анализ соответствующей связи между изменениями амплитудной и фазовой характеристик сыграл здесь заметную роль, позволяя анализировать устойчивость только по одной из них на основании критерия Найквиста.

3.4. Поиск сингулярных функций на основе частотного подхода

Частотный подход получил широкое распространение благодаря его способности передавать довольно сложные соотношения, возникающие при анализе динамических систем, в относительно простом виде. Для того, чтобы применить его в рассматриваемом случае, необходимо рассматривать частотные характеристики не только на мнимой оси, как в обычном частотном анализе, а на всей комплексной плоскости. Это относится к обоим блокам, показанным на рис. 3.1.1, б (самой системе и флип-оператору).

Частотные характеристики системы. Введем в рассмотрение обобщенную частотную характеристику системы $A(p)$, рассматривая ее как коэффициент передачи синусоидальных и гиперболических парциальных составляющих сигналов. Она выражается через введенную ранее функцию $R(p)=Q(p)Q(-p)$ и имеет вид:

$$A(p) = \sqrt{R(p)}. \quad (3.4.1)$$

Эта характеристика совпадает с обычной АЧХ только на мнимой оси, когда $p=j\omega$. Для гиперболических сигналов типа $\text{sh}(at)$ в формулу (3.4.1) следует подставлять $p=a$.

Частотные характеристики флип-оператора. Флип-оператор – линейный, но нестационарный объект. Он не меняет амплитуду гармоник (его АЧХ равна единице), а сдвигает сигнал во времени. Величина сдвига зависит от начальной фазы, причем возможны случаи, когда сигнал вовсе не меняется. Нестационарные объекты принято описывать параметрическими передаточными функциями, зависящими от времени или от параметра. Так, например, в методе Гольдфарба параметрическая передаточная функция линеаризуемого нелинейного элемента зависит от амплитуды входного сигнала.

Применяя флип-метод, мы вводим нестационарный блок, передаточная функция которого зависит, наоборот, от фазы входного сигнала θ .

Пусть входной сигнал равен $u(t) = \sin(\omega t + \theta)$, тогда выходной сигнал флип-оператора будет иметь вид

$$u(T-t) = \sin(\omega T - \omega t + \theta),$$

где T – длительность интервала времени. Для оценки сдвига фазы запишем тот же сигнал как $u(T-t) = \sin(\omega t + \theta + \pi - \omega T - 2\theta)$. Ясно, что добавка $\pi - \omega T - 2\theta$ описывает фазовую характеристику флип-оператора

$$\psi(\omega, \theta) = \pi - \omega T - 2\theta. \quad (3.4.2)$$

В случае аperiodических сигналов анализ фазовой характеристики приводит к сходному результату, однако инверсия знака гармоники не может быть учтена сдвигом фазы на π .

После сделанных замечаний приступим к определению сингулярных чисел и сингулярных функций на основе частотного подхода.

Каждая сингулярная функция $f(t)$ зависит от $2n$ параметров (частот и фаз парциальных составляющих), общее число неизвестных, с учетом алгебраического сингулярного числа, равно $2n+1$. Это отражается на количестве уравнений связи, которые требуются для их отыскания.

В ряде случаев методом исключения переменных можно перейти к одному уравнению относительно одного параметра, в качестве которого наиболее целесообразно взять сингулярное число λ . Такое уравнение будем называть *характеристическим уравнением для операторного спектра динамической системы*.

Первые $2n$ уравнений получаем на основе третьего определения сингулярной функции

$$SF f(t) = \lambda f(t). \quad (3.4.3)$$

Соотношение (3.4.3) можно трактовать как уравнение операторного баланса. При частотном подходе оно разделяется на уравнения амплитудного и фазового балансов. Далее в целях простоты изложения ограничимся рассмотрением сингулярных функций, содержащих только синусоидальные составляющие. На бесконечном и полубесконечном интервалах времени система имеет только такие сингулярные функции, а при переходе к конечному интервалу они играют, как правило, доминирующую роль.

Уравнение амплитудного баланса для таких функций имеет вид

$$A(\omega) - |\lambda| = 0, \quad (3.4.4)$$

где $A(\omega)$ – обычная амплитудно-частотная характеристика системы.

Соответствующее уравнение фазового баланса получаем, учитывая фазовые характеристики каскадного соединения блоков рис. 3.1.1, б,

$$\varphi(\omega) + \psi(\omega, \theta) = \arg(\lambda), \quad (3.4.5)$$

где $\arg(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq 0$ и $\arg(\lambda) = \pi$ при $\lambda < 0$.

После подстановки в уравнения (3.4.4) и (3.4.5) парциальных частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ и фаз $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ получаем систему $2n$ нелинейных уравнений относительно $2n + 1$ неизвестных (с учетом λ). Для замыкания системы уравнений обратимся к начальным и краевым условиям (см. свойство 3). На их основе получаем фазо-частотное уравнение, связывающее парциальные параметры,

$$\chi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0. \quad (3.4.6)$$

В частности, для звеньев первого порядка (интегратора и апериодического звена) оно имеет крайне простой вид $\theta_1 = 0$. Для идеального колебательного звена получаем уже упоминавшееся инвариантное соотношение $\omega_1 \operatorname{ctg}(\theta_1) - \omega_2 \operatorname{ctg}(\theta_2) = 0$. Необходимость в рассмотрении фазо-частотного уравнения отражает специфику конечного интервала времени.

Таким образом, получена замкнутая система уравнений (3.4.4 – 3.4.6) для определения сингулярных чисел и соответствующих им сингулярных функций оператора свертки. Ее можно решать аналитически (если это удастся), либо численно.

Одной из задач, поставленных в начале главы, было отыскание характеристического уравнения для сингулярных чисел оператора свертки. Полученная система уравнений позволяет предложить процедуру его формирования, состоящую из трех шагов.

Шаг 1. Из системы уравнений амплитудного баланса (3.4.4) выразить парциальные частоты как функции λ : $\omega_1(\lambda), \omega_2(\lambda), \dots, \omega_n(\lambda)$

Шаг 2. Подставить полученные выражения для парциальных частот в уравнения фазового баланса (3.4.5) и найти фазовые зависимости $\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \dots, \theta_n(\lambda)$.

Шаг 3. Подставить найденные выражения для парциальных частот и фаз в фазо-частотное уравнение (3.4.6).

В результате получаем искомое характеристическое уравнение. Оно оказывается трансцендентным и имеет счетное множество корней.

Графическая интерпретация первого этапа процедуры поясняется рис. 3.4.1. На рисунке в качестве примера приведена АЧХ системы 4-го порядка с двумя резонансными частотами, которая соответствует первому члену уравнения (3.4.4). Второй член представлен горизонтальной линией. Точкам их пересечения в окрестностях резонансных частот системы отвечают четыре парциальные частоты. В случае их попарной близости у сингулярной функции проявляется эффект биений.

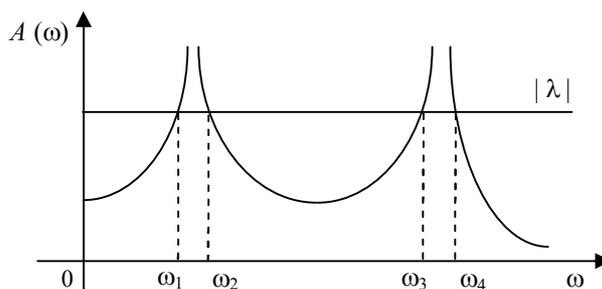


Рис. 3.4.1. Графическая интерпретация уравнения амплитудного баланса.

Гиперболические составляющие сингулярных функций возникают при малых значениях модуля λ , когда число точек пересечения оказывается меньше порядка системы. Проиллюстрируем изложенную процедуру двумя примерами.

Пример 1. Начнем с консервативной системы, как наиболее простой для частотного анализа. Определим характеристическое уравнение и сингулярные функции для звена с передаточной функцией $Q(p) = 1/(p^2 + 1)$.

Уравнение амплитудного баланса (3.4.4) имеет вид $1/(1 - \omega^2)^2 + \lambda^2 = 0$.

Отсюда находим выражения для двух парциальных частот

$$\omega_1(\lambda) = \sqrt{1 - \frac{1}{|\lambda|}}, \quad \omega_2(\lambda) = \sqrt{1 + \frac{1}{|\lambda|}}.$$

Уравнение фазового баланса (3.4.5) запишем с учетом полученного ранее равенства $\psi(\omega, \theta) = \pi - \omega T - 2\theta$ (фазовая характеристика флип-оператора):

$$\varphi(\omega) + \pi - \omega T - 2\theta = \arg(\lambda),$$

где $\varphi(\omega) = \arg(1 - \omega)$ – фазовая характеристика колебательного звена. Ее можно записать в форме $\varphi(\omega_1) = 0$, $\varphi(\omega_2) = \pi$. Здесь ω_1 , ω_2 – парциальные частоты в окрестности особой точки $\omega_0 = 1$.

Отсюда выражаем фазы: $\theta_1 = (\pi - \omega_1 T)/2$, $\theta_2 = -\omega_2 T/2$ (если $\lambda > 0$) и, наоборот, $\theta_1 = -\omega_1 T/2$, $\theta_2 = (\pi - \omega_2 T)/2$ (если $\lambda < 0$).

Остается воспользоваться фазо-частотным уравнением (3.4.6)

$$\omega_1 \operatorname{ctg}(\theta_1) - \omega_2 \operatorname{ctg}(\theta_2) = 0.$$

Подставляя в него парциальные частоты и фазы, для положительных значений λ получаем трансцендентное характеристическое уравнение:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \operatorname{ctg}\left(\frac{T}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}}\right) + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}} \operatorname{ctg}\left(\frac{T}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda}}\right) = 0.$$

Графическое решение этого уравнения для $T = \frac{10\pi}{\sqrt{2}} = 22,3$

представлено на рис. 3.4.2, *a* как точки пересечения функции левой части и оси абсцисс.

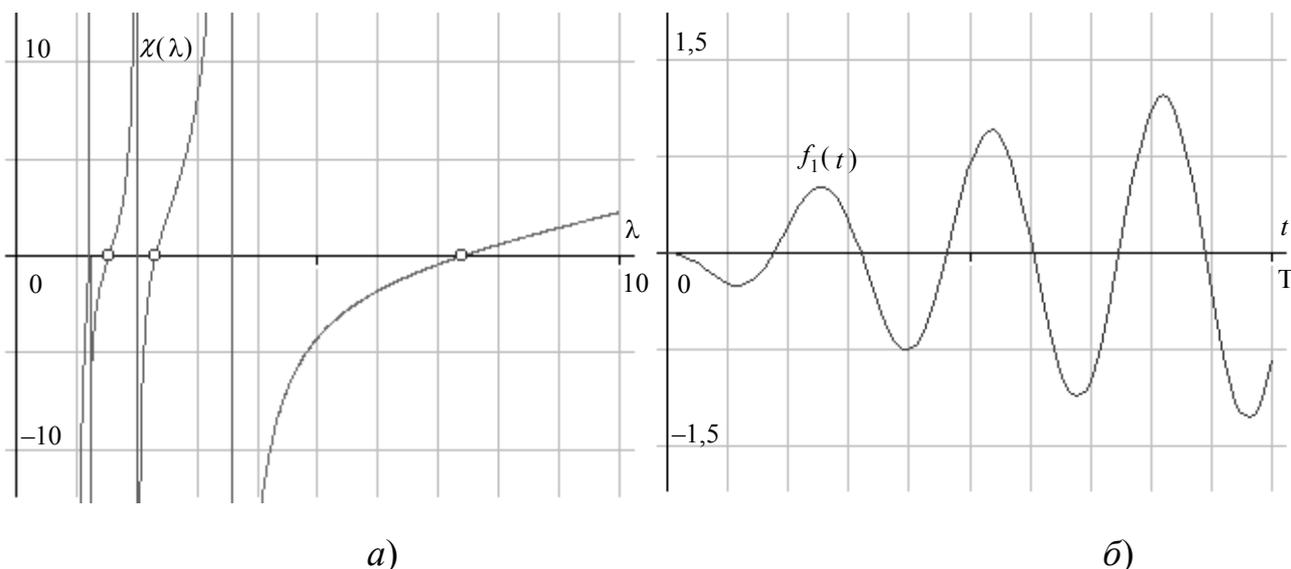


Рис. 3.4.2. Положительные корни характеристического уравнения консервативного звена (*a*) и его главная сингулярная функция (*б*).

По мере приближения к началу координат точки спектра сгущаются (на рисунке указаны первые три точки спектра). Значения корней характеристического уравнения в этих точках для указанного интервала равны 7,43 (главное сингулярное число), далее 2,31 и 1,54.

Отвечающие им сингулярные функции имеют колебательный характер

$$f(\lambda, t) = \sin(\omega_1(\lambda)t + \theta_1(\lambda))\sin(\theta_2(\lambda)) - \sin(\omega_2(\lambda)t + \theta_2(\lambda))\sin(\theta_1(\lambda)),$$

график главной из них показан на рис. 3.4.2, б.

Сила, раскачивающая осциллятор (маятник, колокол) по указанному закону, должна совпадать с правой сингулярной функцией (ее график получается зеркальным отражением приведенного графика относительно середины интервала). Она вызывает отклик максимальной энергии на заданном интервале времени.

Пример 2. Рассмотрим звено с передаточной функцией $Q(p) = 1/(p + b)$. При $b = 0$ эта модель описывает интегратор, при $b > 0$ – устойчивое апериодическое звено и при $b < 0$ – неустойчивое апериодическое звено. С точки зрения частотного подхода звенья первого порядка менее удобны для анализа.

Вначале локализуем парциальный спектр сингулярных функций, опираясь на свойство 1 и формулу (3.3.6). В данном случае, при $p = a + j\omega$ получаем

$$R(p) = Q(p)Q(-p) = 1/(b^2 - p^2) = 1/(b^2 - a^2 + \omega^2 - 2ja\omega).$$

Согласно первому из условий (3.3.6) $\text{Im}(R(p)) = 0$ имеем $a\omega = 0$. Отсюда вытекает, что либо $a = 0$, либо $\omega = 0$, т. е. парциальный спектр сосредоточен на вещественной и мнимой осях комплексной плоскости.

В первом случае сингулярная функция представляет собой гиперболическую зависимость вида $f(t) = sh(at + \theta)$, во втором – синусоиду $f(t) = sin(\omega t + \theta)$.

Согласно второму из условий (3.3.6) $Re(R(p)) \geq 0$ имеем $b^2 + \omega^2 > 0$. Отсюда получаем, что допустимая область вещественной оси ограничена отрезком $-b \leq a \leq b$. В частности, для интегратора, когда $b = 0$, этот отрезок вырождается в точку. Поэтому интегратор не может иметь гиперболических сингулярных функций.

После проведенной локализации спектра перейдем к рассмотрению уравнений баланса.

Обычная АЧХ системы и гиперболическая АЧХ (далее подчеркнутая), определяемая уравнением (3.4.1), дают два уравнения амплитудного баланса для парциальных частот

$$|\lambda| = \overline{A}(\omega) = \sqrt{\frac{1}{b^2 + \omega^2}}, \text{ отсюда } \omega = \sqrt{1/\lambda^2 - b^2},$$

$$|\lambda| = \underline{A}(a) = \sqrt{\frac{1}{b^2 - a^2}}, \text{ отсюда } a = \sqrt{b^2 - 1/\lambda^2}.$$

Второе из них справедливо для собственных значений λ , превышающих статический коэффициент усиления звена.

Обычная фазовая частотная характеристика апериодического звена имеет вид $\varphi(\omega) = -\arctg(\omega/b)$. Для единства картины можно ввести гиперболическую фазовую частотную характеристику $\varphi(a) = -\text{arth}(a/b)$, не учитывающую смену знака гармоники при $b < 0$.

Из фазо-частотного уравнения (нулевых начальных условий) следует, что $\theta = 0$. Поэтому фазовые частотные характеристики флип-оператора для периодического и апериодического режимов имеют вид, соответственно,

$\psi(\omega) = \pi - \omega T$ и $\psi(a) = -aT$, последняя формула не учитывает смену знака гармоники. Сходную характеристику имеет звено задержки на время T .

Отсюда получаем пару уравнений фазового баланса для периодического и аperiodического режимов $-\arctg(\omega/b) + \pi - \omega T = \arg(\lambda)$ и $-\operatorname{arth}(a/b) - aT = 0$. Гиперболический арктангенс $\operatorname{arth}(a/b)$ пересекается с линейной функцией $-aT$ при $a < 0$, причем только в одной точке. Следовательно, гиперболическая гармоника может быть только у неустойчивого звена при $T > b$, причем ровно одна. Это главная сингулярная функция неустойчивого аperiodического звена, она отвечает его максимальному сингулярному числу. Остальные сингулярные функции – обычные синусоидальные, их частоты находим из первого уравнения фазового баланса.

Характеристические уравнения для периодического и аperiodического режимов при положительных значениях λ имеют вид

$$-\arctg\left(\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2 b^2}}\right) + \pi - T\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2 b^2}} = 0 \text{ и}$$

$$-\operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 b^2} - 1}\right) - T\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 b^2} - 1} = 0.$$

Корням уравнений отвечают частоты $\omega_i = \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda_i^2 b^2}}$, $a = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2 b^2} - 1}$,

сингулярные функции $f_1 = \sin(\omega_1 t)$, $f_2 = \sin(\omega_2 t)$, ... для устойчивого звена и $f_1 = \operatorname{sh}(at)$, $f_2 = \sin(\omega_2 t)$, ... для неустойчивого.

На рис. 3.4.3 приведены первые две сингулярные функции аperiodического звена, устойчивого и неустойчивого. В критическом случае, при $T = b$ гиперболическая зависимость сменяется линейной $f_1 = t$ и при дальнейшем уменьшении T – синусоидальной $f_1 = \sin(\omega_1 t)$.

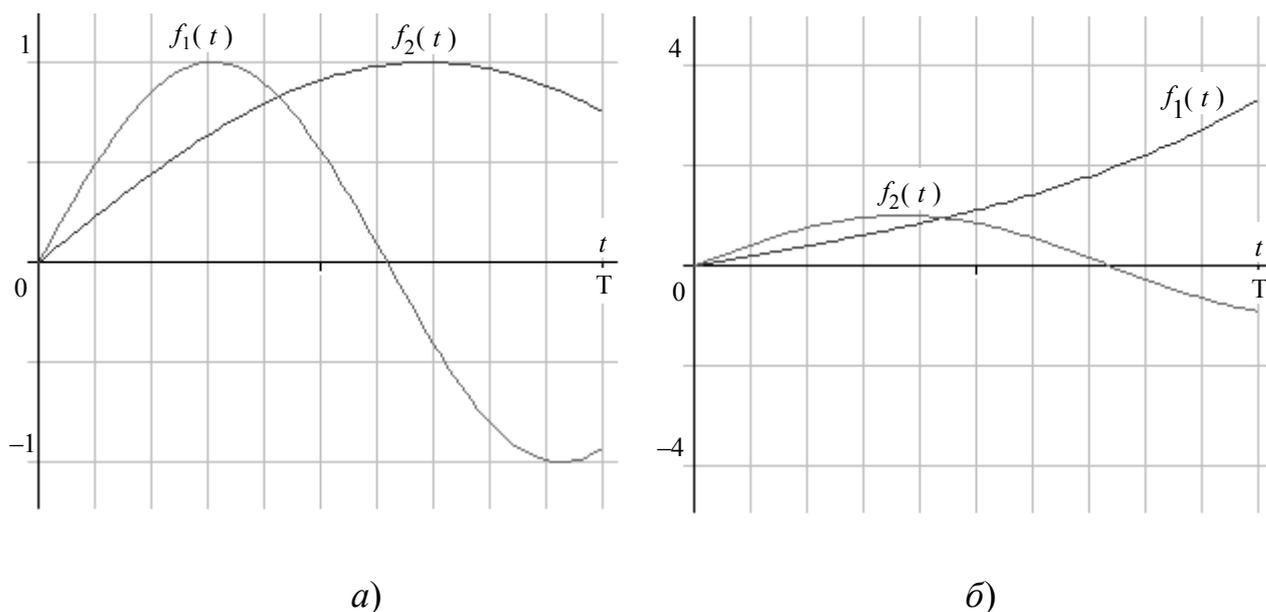


Рис. 3.4.3. Первые две сингулярные функции аperiodического звена:
a – устойчивого; *б* – неустойчивого.

Тем самым, при малых значениях T оба аperiodических звена, устойчивое и неустойчивое, по своим характеристикам, включая сингулярные функции, приближаются к интегратору.

3.5. Графо-аналитический метод исследования

Частотная теория систем автоматического регулирования была создана до применения вычислительной техники и выработала эффективный графо-аналитический метод определения устойчивости динамических систем. На нем основаны, в частности, широко используемые критерии Найквиста, Попова и некоторые другие. Ниже предлагается развитие этого подхода для получения спектральных характеристик оператора свертки на ограниченном интервале времени.

Частотный подход дает прозрачную интерпретацию собственных значений, как точек АЧХ, взятых при дискретных значениях аргумента, т.е.

частот, удовлетворяющих фазовым ограничениям. Он ценен не только как метод получения конкретного результата. С его помощью становятся видны тенденции изменения дискретного спектра по мере изменения протяженности интервала T , характеристик динамических звеньев (постоянных времени, коэффициентов демпфирования и т.д.). Он указывает на неравномерный характер распределения парциальных частот.

Для демонстрации основных закономерностей рассмотрим частотные характеристики интегратора для интервала времени $T = 5$ (см. рис. 3.5.1).

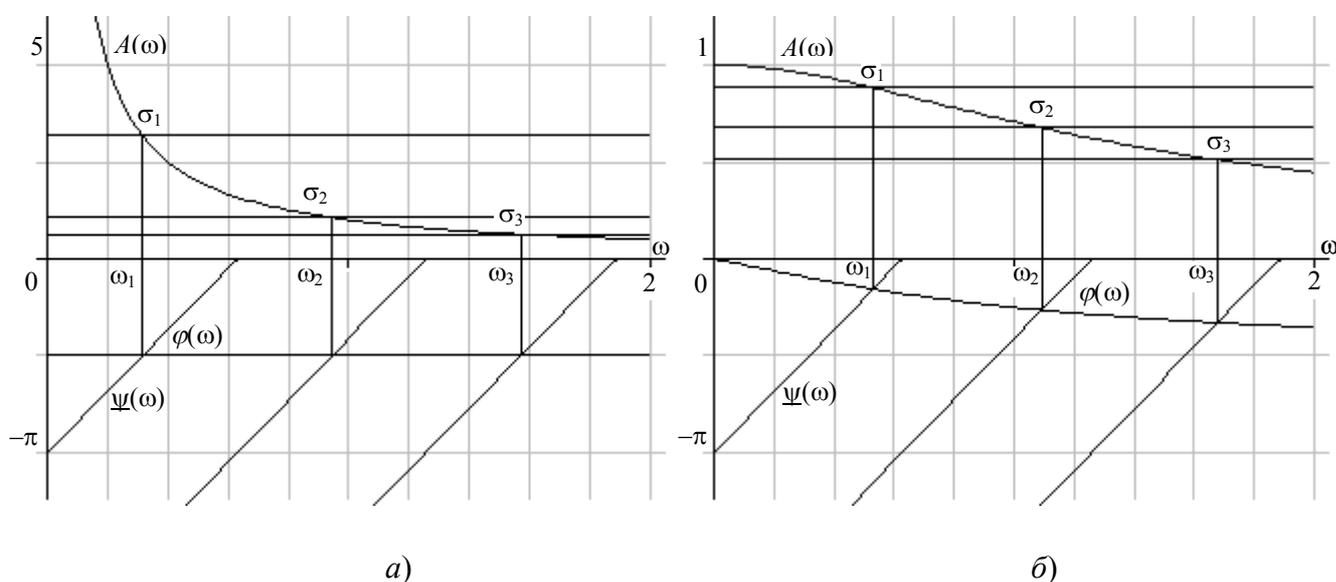


Рис. 3.5.1. Частотные характеристики интегратора (а) и аperiodического звена (б) на конечном интервале времени.

На рис. 3.5.1, а приведены его амплитудная $A(\omega)=1/\omega$ (выше оси частот) и фазовая $\varphi(\omega) = -\pi/2$ (ниже оси частот, оси характеристик совмещены, но масштабы вниз и вверх разные) частотные характеристики, а также смещенная фазовая характеристика флип-оператора $\psi(\omega) = \omega T - \pi$, инвертированная по знаку для удобства учета баланса фаз $\varphi(\omega) = \psi(\omega)$.

Напомним, что фазо-частотное уравнение дает здесь тривиальное решение относительно сдвига фазы $\theta = 0$.

Учитывая синусоидальный вид сингулярных функций, линии частотных характеристик флип-оператора размножены с интервалом 2π .

По точкам пересечения частотных характеристик $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ выясняется частота ω_1 главной сингулярной функции, отвечающая максимальному сингулярному числу σ_1 , а также частоты и значения сингулярных чисел остальных сингулярных функций $f_k(t) = \sin(\omega_k t)$.

На рис. 3.5.1, б) для сравнения приведены аналогичные частотные характеристики апериодического звена. Точки пересечения кривых $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ в этом случае располагаются на оси частот нерегулярно. Проведенный анализ показывает, что чем больше значение T , тем плотнее лежат точки дискретного спектра на непрерывной АЧХ. В области высоких частот (при малых T) спектральные характеристики различных динамических систем сближаются.

У колебательных систем парциальные частоты сосредоточены возле резонансных пиков АЧХ, образуя близкие пары. Аналогичное расщепление спектра хорошо известно в физике.

На высоких частотах, отвечающих малым значениям сингулярных чисел, резонансные пики перестают определять характер сингулярных функций, они все более приближаются к характеристикам n -кратного интегратора, по этой причине его исследование представляет особый интерес.

В парциальных спектрах "младших" сингулярных функций минимально-фазовых систем второго и большего порядков появляются гиперболические составляющие. Их анализ частотными методами представляет определенные трудности, однако этого можно избежать, рассматривая более простые сингулярные функции, поскольку любая из них (подобно весовой функции) однозначно описывает систему.

3.6. Выводы

Анализ поведения динамических систем на конечном интервале времени важен для многих прикладных задач. Классическая теория линейных систем в значительной степени ориентирована на бесконечный или полубесконечный интервал времени. Это касается аппарата частотных характеристик, преобразования Лапласа, анализа устойчивости и других областей, где получено много красивых и полезных результатов. Однако на практике такой подход применим лишь для систем, время работы которых значительно больше длительности переходных процессов. Вместе с тем, реальные системы часто работают на конечных интервалах времени, соизмеримых с временем переходных процессов системы. В таких условиях многие результаты классической теории перестают быть справедливыми или вообще теряют смысл. Это касается, например, вопросов устойчивости систем на конечном интервале времени, а также той роли, которые играют синусоидальные гармонические сигналы в частотном анализе.

Поэтому представляется важным изучение, во-первых, тех результатов и положений классической теории, которые сохраняются и на конечных интервалах времени (возможно с частичной модификацией) и, во-вторых, изучение новых эффектов и свойств, которые здесь появляются. В этом смысле можно говорить о необходимости развития финитной теории линейных систем. В главе исследован один из аспектов этой теории, связанный с изучением спектральных характеристик оператора свертки на конечном интервале времени. Разработан способ определения его сингулярных чисел и сингулярных функций и исследованы их свойства. При неограниченном увеличении интервала времени сингулярные функции становятся синусоидальными, однако на конечном интервале они носят совершенно иной характер и представляют собой полигармонические сигналы с различными парциальными частотами.