

5. СИСТЕМНЫЕ КРИТЕРИИ И ВЫРОЖДЕННЫЕ ЗАДАЧИ

5.1. Введение

Задачи на определение собственных и сингулярных чисел линейных операторов и соответствующих им функций с последующей идентификацией параметров математической модели встречаются при построении адаптивных систем. Критерии управляемости и наблюдаемости, используемые для анализа системных свойств объекта, имеют различные интерпретации, включая модальную. Хорошо известна, например, теорема Калмана о том, что для полностью управляемой и наблюдаемой системы можно реализовать любой спектр матрицы замкнутой системы назначением коэффициентов обратной связи по состоянию. Таким образом, в адаптивных системах задачи, связанные с определением и назначением спектров обычных матриц и линейных операторов, переключаются и имеют много общего.

В работе рассматривается подход, разработанный автором в [30, 32], связанный с построением мер модального доминирования. Эти исследования в конечном итоге ведут к рассмотрению соответствующих системных критериев и мер идентифицируемости, необходимых для обоснованного применения идентификационных процедур, будь то обычные методы или методы, построенные с использованием результатов ганкелевого эксперимента, или экспериментов близких в определенном смысле к нему.

Модальный синтез – проблема, рассматриваемая еще Калманом. По своему происхождению она является наследницей другой, ставшей уже классической, алгебраической проблемы собственных значений. Такие задачи развиваются на протяжении длительного времени. Модальный синтез эксплуатирует одну из хорошо разработанных областей знания. Вычислительные особенности определения спектра матриц интенсивно изучались во второй половине двадцатого века, значительные успехи в этой области связаны с именами Дж. Френсиса и В.Н. Кублановской [110].

Выбор спектра является фундаментальным вопросом темы, вопросом, несмотря на его важность, до сих пор мало изученным. Порою спектр выбирается из весьма абстрактных геометрических построений на комплексной плоскости, таких, например, как задание собственных значений на дуге окружности с равными расстояниями между собой. Для многосвязных систем выбор спектра выливается в мало приятную проблему роя собственных значений, когда их количество является большим, и совсем неочевидно, что со столь многочисленными характеристическими точками нужно делать. Очень неудачным представляется выбор доминирующих собственных значений по признаку одной лишь близости их к мнимой оси. Ясно, что в положении исходного спектра скрыты глубинные свойства системы, произвольное распределение его означает пренебрежение динамикой управляемого объекта.

Поэтому основной трудностью модального синтеза является не недостаток, а избыток параметров, влияя на которые можно получать системы с различными свойствами. Отсюда вытекает, в частности, уже упомянутая проблема роя, когда задача связана с избытком возможностей. С этой точки зрения замена лобового назначения желаемого спектра указанием тенденции его изменения с опорой на некоторые меры модального доминирования, видится решением, сводящим выбор многих собственных значений к выбору одного или нескольких показателей, описывающих сжатие спектра.

Задача синтеза нередко сводится к решению какого-либо стандартного матричного уравнения. Наиболее известны линейное матричное уравнение Ляпунова и нелинейное матричное уравнение Риккати (оптимальный синтез по квадратичному критерию качества). Стандартные уравнения выделять выгодно, они привлекают внимание специалистов по вычислительной математике, обеспечивающих их квалифицированное решение. Вычленим, согласно методике, предложенной автором в [30], матричное уравнение, связанное с проблемой модального синтеза.

5.2. Матричное уравнение Сильвестра

Пусть линейная динамическая система имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (5.1.1)$$

где \mathbf{A} – матрица системы (квадратная, n -го порядка), \mathbf{B} – матрица входа размера $n \times m$, \mathbf{C} – матрица выхода размера $l \times n$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ – векторы состояния, управления и выхода соответственно, функции времени $t \geq 0$.

В задаче модального синтеза при помощи линейных обратных связей по состоянию $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ требуется синтезировать матрицу замкнутой системы с желаемым спектром $\mathbf{Q} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$, который надо уметь задавать.

Для формулировки основного результата, предлагаемого автором, потребуются теперь некоторые уравнения и зависимости, вытекающие из решения матричного уравнения Сильвестра, изложенные ниже. А именно, введем отражающий свободу синтеза неопределенный матричный множитель \mathbf{M} . Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{A} - \mathbf{Q} = \mathbf{BK}.$$

Представим матрицы разомкнутой и замкнутой систем разложениями в базисах их собственных векторов

$$\mathbf{A} = \mathbf{VDV}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{SJS}^{-1},$$

где \mathbf{D} , \mathbf{J} – диагональные, в частности, а в общем – жордановы, матрицы собственных значений; \mathbf{V} , \mathbf{S} – матрицы соответствующих собственных векторов. Кроме указанного могут быть разложения с вещественными компонентами матриц.

С учетом разложения \mathbf{Q} , после умножения матричного уравнения справа на \mathbf{S} и группировки членов, имеем

$$\mathbf{A S} - \mathbf{S J} = \mathbf{BKS}.$$

Это уравнение нелинейно относительно неизвестных \mathbf{S} и \mathbf{K} . Вследствие умножения на \mathbf{S} , оно приобрело лишние корни: ему будут удовлетворять не только тривиальные (нулевые) решения \mathbf{S} и \mathbf{K} , но также вырожденные матрицы. Поэтому его следует дополнить условием $\det \mathbf{S} \neq 0$.

Параметризуем правую часть уравнения с помощью неопределенного матричного множителя \mathbf{M} , исключая нелинейную составляющую так, что $\mathbf{KS} = \mathbf{M}$, тогда

$$\mathbf{AS} - \mathbf{SJ} = \mathbf{BM}. \quad (5.1.2)$$

Получаем матричное уравнение Сильвестра, линейное относительно \mathbf{S} . Решив его, далее вычислим матрицу обратных связей в виде $\mathbf{K} = \mathbf{MS}^{-1}$.

В результате параметризации множество возможных решений задачи модального управления записано теперь в явной форме относительно искомой матрицы \mathbf{K} . Оно определяется видом матричного множителя \mathbf{M} , влияющего на правую часть уравнения Сильвестра $\mathbf{AS} - \mathbf{SJ} = \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \mathbf{BM}$.

Операцию придания неопределенной матрице \mathbf{M} некоторого конкретного значения назовем замыканием уравнения Сильвестра. Проблема замыкания уравнения центральный и важный для придания правильного направления синтезу многосвязных систем. Через него лежит путь к обоснованному решению проблемы выбора спектра и проблемы размещения собственных векторов замкнутой системы.

Ниже рассматривается подход, в котором матрица рассматривается несколько способов назначения \mathbf{M} , связанных с различными мерами модального доминирования.

Явный вид решения уравнения Сильвестра, совпадающего с решением $\mathbf{S}(\infty)$ дифференциального уравнения, имеет вид $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{J}$, $\mathbf{S}(0) = \mathbf{P}$, тогда $\mathbf{S}(\infty) = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{P} e^{\mathbf{J}t} dt$, при условии, что спектры матриц \mathbf{A} и \mathbf{Q} различны между собой. Частным случаем матричного уравнения Сильвестра является уравнение Ляпунова, получаемое при замене \mathbf{J} на $-\mathbf{A}^T$, т. е. $\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}^T = \mathbf{P}$.

Отметим, что при синтезе систем, оптимальных по квадратичному критерию качества, встречается матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}^T - \mathbf{S}^T \mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{P},$$

которое, как видно, сводится к уравнению Ляпунова при аннулировании квадратичной составляющей.

Различие, которое вносит модальный подход как возможная альтернатива оптимальному подходу при квадратичном критерии качества, обуславливается более простым видом линейного уравнения Сильвестра в сравнении с уравнением Риккати, которое, к тому же, невозможно подвергнуть указанной ниже декомпозиции на составляющие.

В задачах модального синтеза изменение всего спектра, как правило, нецелесообразно, поэтому указанное выше аналитическое решение уравнения Сильвестра далеко от практических нужд и носит осведомительный характер.

Итак, особый случай, оговариваемый общей теорией, в модальном синтезе является основным и наиболее актуальным вариантом.

Для матрицы \mathbf{Q} с простым спектром имеем

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \mathbf{S} = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n).$$

В данном случае, уравнение Сильвестра допускает декомпозицию на ряд более простых подсистем

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{S}_i = \mathbf{B} \mathbf{M}_i, \quad (5.1.3)$$

где \mathbf{M}_i – столбцы $\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n)$, $i = 1..n$.

Анализ и синтез модальных систем отличаются между собой видом правой части, в задачах анализа она нулевая. Это и есть самое простое замыкание уравнения Сильвестра, гарантирующее сохранение спектра.

В вырожденных задачах модального синтеза часть собственных значений не изменяются, отсюда следует факторизация матричного множителя на произвольно назначаемую и нулевую части, пусть

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_k, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}),$$

только первые k собственных значений матриц разомкнутой и замкнутой систем различны между собой.

Следовательно, операция замыкания уравнения Сильвестра связана с относительно небольшим количеством произвольно назначаемых коэффициентов. Остальные находим из условием совместности. При совпадении λ_i с одним из собственных значений матрицы \mathbf{A} их выбор весьма стеснен, есть рациональная форма решения, регламентирующая оставлять собственные векторы такими, какие они есть у матрицы разомкнутой системы.

Итоговые уравнения модального синтеза отличаются от уравнений анализа незначительно, имеем

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{S}_i = \mathbf{B} \mathbf{M}_i; \quad i = 1..k; \quad (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) \mathbf{S}_j = \mathbf{0}; \quad j = k+1..n.$$

Отметим, что у многосвязных систем кроме проблемы размещения спектра возникает проблема размещения собственных векторов, поскольку правая часть уравнений допускает некоторую вариацию.

Матричный множитель \mathbf{M} предложен как удобное методическое средство, упрощающее некоторые выкладки и, в частности, удобное для оптимизации структуры собственного пространства. Однако можно обойтись и без указанного матричного множителя.

Пусть $\mathbf{L} = (\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{B}^+)$, альтернативный вид уравнений модального синтеза выглядит еще более близко к классической алгебраической проблеме собственных значений

$$\mathbf{L} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{S}_i = 0, \quad i=1..n.$$

Умножение на вырожденную матрицу \mathbf{L} отражает расширение областей, в которых можно искать собственные векторы матрицы \mathbf{Q} по сравнению с тесными границами инвариантных подпространств матрицы \mathbf{A} . Чем больше входов имеет многосвязная система, тем более вольно могут избираться назначаемые собственные векторы. Теоретически возможен синтез, оставляющий на месте спектр и изменяющий только собственные векторы. Эту оригинальную идею следует иметь в виду, перечисляя возможные варианты замыкания уравнения Сильвестра.

5.3. Меры модального доминирования

Понятие меры доминирования берет начало в калмановской декомпозиции системы на части вполне управляемые и вполне наблюдаемые. Продолжая дальше, логически можно выделить части более или менее управляемые, более или менее наблюдаемые и так далее, чему способствует модальная дифференциация системы на подсистемы.

Подобно определению функции плотности вероятности, функция меры доминирования не регламентируется жестко. Она может быть назначена по разному и отражает принципиальную свободу в выборе спектра. Важно, чтобы ее экстремальные значения отражали потерю управляемости (наблюдаемости).

Поскольку задача модального синтеза в общем случае не имеет единственного решения, закономерно ставить вопрос о поиске решения с минимальной нормой.

Сформулируем теорему, назвав элементарным изменением спектра изменение только одного собственного значения матрицы исходной системы.

Теорема 1. При элементарном изменении спектра минимальная норма матрицы K обратных связей модального регулятора прямо пропорциональна радиусу окружности, на которую переходит варьируемое собственное значение, и обратно пропорциональна величине $\mu_{11} = M_1^* M_1$, где $M_1 = (V_1^{-1} B)^*$, V_1^{-1} – строка инверсной матрицы собственных векторов A , отвечающая варьируемому собственному значению.

Доказательство. Выпишем уравнение Сильвестра на случай изменения только одного собственного значения, т.е. при $k=1$. Мы имеем следующие формулы

$$(A - \lambda_1 E) S_1 = B M_1, \quad M = (M_1 \ 0 \ \dots \ 0), \quad K = M S^{-1},$$

где $S = [S_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]$, V_i – собственные векторы матрицы A .

Из них видно, что матрица обратных связей зависит только от первой строки S^{-1} , содержащей левые собственные векторы $Q = A - BK$.

Для обозначения строк инверсных матриц привлечем индексы, как и для столбцов обычных матриц, это не создаст путаницы.

Так как $S^{-1} S = E$, первая строка S_1^{-1} ортогональна собственным векторам $V_2 \ \dots \ V_n$. Следовательно, она коллинеарна V_1^{-1} , т.е. $S_1^{-1} = p V_1^{-1}$, причем $S_1^{-1} S_1 = 1$, так что коэффициент пропорциональности $p = 1 / V_1^{-1} S_1$.

Теперь можно записать формулу решения $\mathbf{K}=\mathbf{M}_1\mathbf{S}_1^{-1}=\mathbf{M}_1\mathbf{V}_1^{-1}/\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{S}_1$, вектор $\mathbf{S}_1=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}_1$. Подставим разложение $\mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^{-1}$ в выражение для \mathbf{S}_1 . Вынося \mathbf{V} и \mathbf{V}^{-1} за скобки, получим очередные упрощения, оставляющих на месте $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{E}$ разность пары собственных значений

$$\mathbf{K} = (\lambda_1^A - \lambda_1) \mathbf{M}_1 \mathbf{V}_1^{-1} / \mathbf{V}_1^{-1} \mathbf{B} \mathbf{M}_1. \quad (5.1.4)$$

Нас интересует минимальное по норме решение. Искомый минимум достигается на максимуме значения делителя $\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{B}\mathbf{M}_1$. От нормы \mathbf{M}_1 норма \mathbf{K} не зависит, этот вектор есть в знаменателе. Остается варьировать его ориентацию. Максимум произведения компонент делителя $\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{B}$ и \mathbf{M}_1 достигается на решении $\mathbf{M}_1=(\mathbf{V}_1^{-1}\mathbf{B})^*$.

Тогда $\mathbf{K}=\mathbf{B}^T\mathbf{K}_{11}$, $\mathbf{K}_{11}=(\lambda_1^A-\lambda_1)(\mathbf{V}_1^{-1})^*\mathbf{V}_1^{-1}/\mu_{11}$, $\mu_{11}=\mathbf{M}_1^*\mathbf{M}_1$. Остались формулы, перечисленные в тексте теоремы. Доказательство окончено.

Отсюда следует путь введения понятия меры модального доминирования, предлагаемый автором в [30], опирающийся на свойства решений уравнения Сильвестра.

Определение. Мерой модальной управляемости (наблюдаемости) собственного значения называется величина, обратная по отношению к минимальной норме матрицы линейного регулятора $u(t)=-\mathbf{K}x(t)$ (наблюдающего устройства) при переносе одного отдельно взятого собственного значения на окружность единичного радиуса в окрестности варьируемой точки спектра разомкнутой системы.

Сосредоточим внимание на опускаемом ранее из виду приближенном решении уравнения Сильвестра.

Теорема 2. В режиме малых перемещений матрицу регулятора можно аппроксимировать суммой матриц регуляторов, реализующих элементарное изменение спектра, т. е.

$$\mathbf{K} \cong \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \dots + \mathbf{K}_n, \mathbf{K}_i = \mathbf{B}^T \mathbf{K}_{ii}, \mathbf{K}_{ii} = (\lambda_i^A - \lambda_i)(\mathbf{V}_i^{-1})^* \mathbf{V}_i^{-1} / \mu_{ii}, \boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}^* \mathbf{M}.$$

Доказательство. Запишем замкнутое матричное уравнение Сильвестра в форме $\mathbf{D}\underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{S}}\mathbf{J} = \underline{\boldsymbol{\mu}}$, разрешенной относительно проекций $\underline{\mathbf{S}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{S}$ собственных векторов \mathbf{Q} на оси собственного базиса \mathbf{A} . Отсюда имеем

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{11}}{\lambda_1^A - \lambda_1} & \dots & \frac{\mu_{1n}}{\lambda_1^A - \lambda_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\mu_{n1}}{\lambda_n^A - \lambda_1} & \dots & \frac{\mu_{nn}}{\lambda_n^A - \lambda_n} \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \frac{\mu_{11}}{\lambda_1^A - \lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{\mu_{nn}}{\lambda_n^A - \lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что при малом изменении спектра внедиагональными элементами $\underline{\mathbf{S}}$ можно пренебречь.

Но тогда диагональной будет и инверсная матрица, входящая в расчет регулятора $\mathbf{K} = \mathbf{M}\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{M}\underline{\mathbf{S}}^{-1}\mathbf{V}^{-1}$. Решение распадается на ряд задач, с формулами которые встречались при точечной подвижке собственных значений. Доказательство окончено.

Итак, при элементарном изменении спектра справедлива следующая оценка нормы матрицы обратных связей

$$\min \|\mathbf{K}\| = \frac{1}{\mu_{\otimes}}, \quad |\lambda_1^A - \lambda_1| = 1.$$

где $\mu_{\otimes} = \sqrt{\mu_{11}}$ – мера модальной управляемости точки λ_1^A .

Эта оценка применима также в отношении слагаемых, управляющих малым групповым переносом спектра.

Коэффициенты матрицы $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{M}^*\mathbf{M}$ зависят от назначаемых элементов \mathbf{M} . Обсудим несколько вариантов замыканий уравнения Сильвестра, отражающих разные цели синтеза.

В общем, суммарное влияние входов или выходов на модальные движения описывает диагональ матрицы W -взвешенных квадратов мер модального доминирования по входам $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B}$ (или по выходам, в дуальной задаче), причем предполагается, что строки \mathbf{V}^{-1} , содержащие левые собственные векторы \mathbf{A} , нормированы

$$\underline{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{M}^* \mathbf{M} = \underline{\mathbf{B}} \mathbf{W} \underline{\mathbf{B}}^*.$$

Варианты замыканий $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{B}}^*$ и $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{B}}^+$ порождают весовые матрицы

$$\mathbf{W} = \mathbf{E} \text{ и } \mathbf{W} = (\underline{\mathbf{B}}^* \underline{\mathbf{B}})^{-1}.$$

В обоих случаях меры модального доминирования изменяются в некоторых заранее известных границах (определяющих крайние случаи). В первом случае меры ограничивает сверху норма матрицы \mathbf{B} . Во втором – меры модального доминирования заведомо неотрицательны, но не превосходят единицы, а их сумма равна рангу матрицы входа \mathbf{B} .

В теории динамических систем большое значение придается инвариантам, каковыми являются меры, не зависящие (при аккуратном их определении) от масштабирования входных и выходных сигналов. Их значения зависят, впрочем, от выбора базиса пространства состояний, не связанного с вход-выходными соотношениями. Так и должно быть, поскольку свойства наблюдающих устройств и регуляторов связаны с особенностями пространства-посредника. Хорошая управляемость в одном базисе имеет свойство приводить к хорошей наблюдаемости в другом. Что свидетельствует о том, что мотивированное назначение спектра должно исходить из показателей как управляемости, так и наблюдаемости.

Источником мер модального доминирования могут служить и иные зависимости. Стоит присмотреться к вычетам передаточной функции, т.е. к коэффициентам усиления ветвей, отвечающим жордановой декомпозиции системы на параллельные подсистемы

$$Q(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = \sum_i K_i Q_i(p), \quad K_i = \frac{b(\lambda_i^A)}{a'(\lambda_i^A)} = \frac{\prod (\lambda_i^A - \lambda_j^0)}{\prod_{i \neq j} (\lambda_i^A - \lambda_j^A)},$$

где λ_i^A – полюса, λ_j^0 – нули динамической системы.

Как видно, вычеты K_i обладают ценным качеством. Они прямо пропорциональны произведению расстояний полюса от нулей передаточной функции и обратно пропорциональны произведению расстояний полюса от остальных полюсов. Эти отношения учитывают взаимные положения полюсов и нулей на плоскости. К недостаткам вычетов как мер относится то, что при сближении пары полюсов они резко возрастают, что не отражает действительной роли модальных составляющих, поскольку знаки коэффициентов усиления соответствующих ветвей становятся противоположными по знаку.

Поэтому избранный геометрический подход выглядит более привлекательным.

Нормирование левых и правых собственных векторов разрушает двойственность построенных из них базисов. Элементы нормированных матриц входа и выхода $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$, $\underline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{V}$ отличаются от коэффициентов входа и выхода параллельных ветвей канонической формы нормами левых и правых собственных векторов. Попарные произведения этих норм называются коэффициентами перекоса. Коэффициенты перекоса отражают, в свою очередь, искажение собственного базиса, поэтому сближение пары полюсов не столь существенно сказывается на мультипликативных мерах, учитывающих управляемость и наблюдаемость.

Собственные значения матрицы замкнутой системы принято наносить на комплексную плоскость. Для повышения информативности этой картины можно добавить дополнительную третью ось, подвешивая точки спектра над плоскостью на высоте, пропорциональной мультипликативным мерам их модального доминирования.

Кроме того, можно использовать подход, принятый в астрономии. Звездные атласы дают представление о координатах звезды и ее величине. Учитывая комментируемую ранее проблему роя собственных значений, у этого предложения есть шансы на успех в автоматизированных процедурах модального синтеза.

Отметим также факт теории систем: меры управляемости и наблюдаемости дуальных систем попарно совпадают.

Согласуя большую (критерии управляемости-наблюдаемости) и малую (меры модального доминирования) меры, закономерно интересоваться консистентностью мер.

Под консистентностью будем понимать возможность вынесения правильного суждения о свойствах объекта в целом на основании таких дифференцированных показателей. Вопрос сводится к выяснению, может ли извлеченная диагональ матрицы μ служить системной матрицей управляемости или наблюдаемости? Для объектов с матрицей A простой структуры поставленная задача решается однозначно, можно показать, что введенные меры консистентны.

На случай кратных собственных значений требуется более гибкий подход, поскольку соответствующие собственные и, в общем, жордановы векторы свободно избираются в пределах инвариантных подпространств.

Это создает трудности интерпретации их скалярных произведений с векторами входа и выхода. Тем не менее, консистентности мер можно добиться минимизацией их варьируемых значений. Иными словами, принципиальных ограничений для введения консистентных мер нет.

Матрица $\mu = \mathbf{BWB}^*$ встречается при вычислении грамиана управляемости (наблюдаемости, в дуальной задаче). Грамианы используются в известных формулировках альтернативных системных критериев Калмана. Консистентность мер напрямую следует из этого обстоятельства.

Неизбежная размытость меры следует из множественности целей модального синтеза: решение различных задач по-разному трудно. Остановимся на этом подробнее. Мера отражает близость к потере системного свойства, введенного Калманом, отчего управлять модальным движением или наблюдать его более легко или, наоборот, более трудно. Оценка трудозатрат в том или ином количественном выражении конкретизирует ее величину. Одинаково отражаются предельные случаи потери управляемости или наблюдаемости, консолидирующие разные подходы к определению мер.

Традиционный путь решения задач модального синтеза опирается на канонические формы динамических систем, позволяющие прямо назначать не спектр, а коэффициенты характеристического уравнения матрицы замкнутой системы. Для многосвязных систем проблема поиска канонической формы управляемости выливается в процедуру выбора состава и объемов фробениусовых клеток. Обусловленность эквивалентных преобразований, как правило, оставляет желать лучшего. Кроме того, синтез регуляторов сопряжен с аннулированием коэффициентов внедиагональных блоков. Такого сорта решения навязаны соображениями вычислительной простоты, они не учитывают динамику объекта.

Представленные выше уравнения описывают альтернативный подход, в котором приведение к фробениусовой форме не используется. Его преимущество состоит в возможности использования информации о мерах модального доминирования. Свободу выбора множителя \mathbf{M} можно употребить для придания собственным векторам матрицы $\mathbf{Q} = \mathbf{SJS}^{-1}$, где $\mathbf{J} = \mathbf{D} + \delta\mathbf{D}$, некоторых реально достижимых позиций вблизи собственных векторов матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{VDV}^{-1}$.

В данном случае алгоритмы модального синтеза становятся непосредственным продолжением алгоритмов анализа.

Обозначим резольвенту матрицы разомкнутой системы $\mathbf{R}(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^{-1}$, тогда $\mathbf{S}_i = \mathbf{R}(\lambda_i) \mathbf{B} \mathbf{M}_i$. Рассмотрим положения назначаемых собственных векторов.

Вариант 1. Прямой путь к притяжению собственных векторов матрицы \mathbf{Q} к собственным векторам матрицы \mathbf{A} связан с рассмотрением уравнений $\mathbf{S}(\lambda_i, \mathbf{M}_i) = \mathbf{V}_i$. Минимум норме разности векторов левой и правой части доставляет нормальное псевдорешение уравнения

$$\mathbf{R}(\lambda_i) \mathbf{B} \mathbf{M}_i = \mathbf{V}_i.$$

Возможны облегченные в вычислительном отношении варианты по упрощенным формулам.

Вариант 2. Запишем матричное уравнение Сильвестра в форме разрешенной относительно проекций $\underline{\mathbf{S}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S}$ собственных векторов \mathbf{Q} на оси собственного базиса \mathbf{A}

$$\mathbf{D} \underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{S}} \mathbf{J} = \underline{\mathbf{B}} \mathbf{M}, \text{ где } \underline{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{B}.$$

Ввиду диагональности матриц собственных значений, правая часть уравнений является каркасом искомого решения $\underline{\mathbf{S}}$, изменяемого смещениями собственных значений $\mathbf{J} = \mathbf{D} + \delta \mathbf{D}$.

Идее сближения собственных векторов отвечает притяжение каркаса к единичной матрице. Отсюда получаем уравнение $\underline{\mathbf{B}} \mathbf{M} = \mathbf{E}$ и выходим на его нормальное псевдорешение $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{B}}^+$ как на средство, индифферентное к частностям конкретных изменений $\delta \mathbf{D}$.

Вариант 3. В каркасе $\underline{\mathbf{B}} \mathbf{M}$ выбором \mathbf{M} усилим диагональные элементы, получим решение $\mathbf{M} = \underline{\mathbf{B}}^*$, близкое, по сути, к предыдущему варианту, но более простое в вычислительном отношении.

Именно эти решения и указаны в возможных вариантах выбора неопределенных коэффициентов матричного множителя.

Разумеется, это не единственные предложения. Разнообразие вариантов отвечает свойствам вырожденных задач. С перемещением по схеме расчета сверху вниз формулы упрощаются.

Рассмотрим важный частный случай, касающийся синтеза систем с одним входом. Поскольку собственные векторы определены с точностью, как минимум, до одной произвольной постоянной, выбор величин компонент в матрице строке \mathbf{M} можно упростить и подчинить единственно условию алгебраической совместности уравнения Сильвестра, приняв $M_i=1, i=1..k$. Уравнения модального синтеза приобретают особенно лаконичный и близкий к формальной постановке алгебраической проблемы собственных значений характер

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \mathbf{S}_i = \mathbf{B},$$

где $i=1..k$; для неизменяемой же части спектра $(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}) \mathbf{S}_j = 0, j=k+1..n$.

Обращает на себя внимание также то, что собственные векторы являются значениями векторной резольвенты

$$\mathbf{S}(\lambda) = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B},$$

которая, в свою очередь, с точностью до знака есть передаточная функция разомкнутой системы от входа к вектору состояния. Все возможные варианты синтеза замкнутой системы содержит передаточная функция разомкнутой системы, являющаяся годографом собственных векторов. С учетом $\mathbf{M} = (1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)$, из выражения $\mathbf{K} = \mathbf{M} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}_1^{-1} + \mathbf{S}_2^{-1} + \dots + \mathbf{S}_k^{-1}$, легко видеть, что искомая матрица обратных связей является суммой левых собственных векторов (т.е. строк \mathbf{S}^{-1}) матрицы \mathbf{Q} , соответствующих изменяемым собственным значениям.

На случай систем второго порядка вершина вектора $S(\lambda)$ прочерчивает на плоскости кривую.

Этот годограф с корневым годографом, изучаемым в задачах параметрического синтеза регуляторов. Свойства этого годографа такие:

$$\lambda \rightarrow \xi \rightarrow \pm \infty, S(\lambda) \rightarrow -\mathbf{B}/\xi; \lambda \rightarrow 0, S(\lambda) \rightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \text{ (равновесие).}$$

При изменении собственного значения λ в диапазоне $\pm\infty$ годограф собственного вектора начинается на векторе входа \mathbf{B} и заканчивается на нем, последовательно обходя все собственные векторы \mathbf{A} . В непосредственной окрестности последних радиус годографа возрастает, при $\lambda \rightarrow \lambda_i^A$ наблюдаются разрывы векторной резольвенты, причем $S(\lambda) \rightarrow \mathbf{V}_i$. При нулевом значении λ годограф проходит через положение равновесия, в котором находится динамическая система после подачи на ее вход единичного ступенчатого воздействия. По крайней мере, один из собственных векторов можно найти экспериментально как x_0 , не располагая математическим описанием объекта.

Поведение годографа дает почву для выводов в отношении свойств алгоритмов синтеза. Прежде всего, ясной становится бесперспективность политики смещения собственных значений в ограниченную зону или на далекую периферию, поскольку в обоих случаях матрица собственных векторов \mathbf{S} будет заполнена почти коллинеарными друг другу столбцами. Регулятор же зависит от инверсной к ней матрицы, поэтому указанный выбор ведет к плохо обусловленным задачам и росту коэффициентов обратных связей. У многосвязных систем настраиваемый матричный множитель \mathbf{M} позволяет генерировать для каждого изменяемого собственного значения свой вход, выбирая его из линейной оболочки вектор столбцов матрицы \mathbf{B} . Среди вариантов модального синтеза есть те, которые ориентированы на максимальные по нормам столбцы матрицы \mathbf{B} , это позволяет обходиться малыми величинами элементов матрицы регулятора \mathbf{K} .

5.4. Автоматизация выбора спектра

Полный обзор свойств вариантов замыкания уравнения Сильвестра, включая гарантии его разрешимости, может составить предмет отдельной дисциплины в пределах темы модального синтеза. Остановимся подробнее на задачах автоматизации выбора спектра.

Комплексные собственные значения матрицы системы распадаются на пары комплексно сопряженных величин $\lambda = \alpha + j\beta$ и $\lambda^* = \alpha - j\beta$. Согласно формуле Эйлера, элементарное движение (мода) описывается как

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + j \sin \beta t).$$

Система устойчива, если все ее собственные значения лежат в левой полуплоскости, см. рис. 5.4.1.

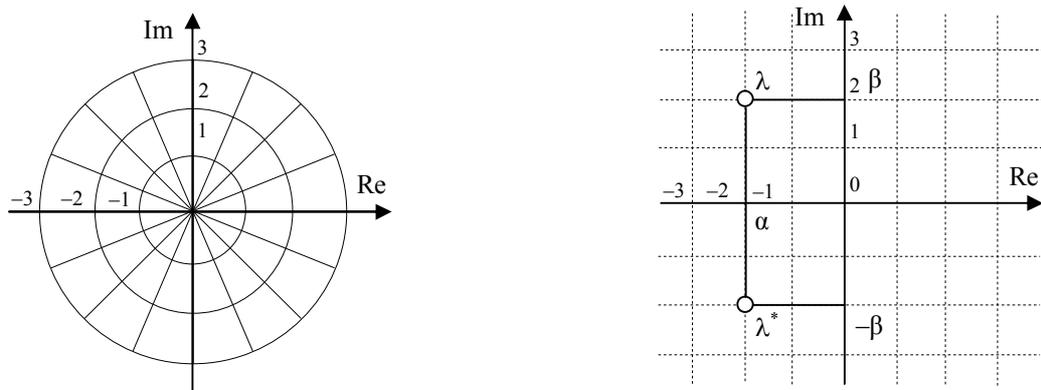


Рис. 5.4.1. Виды модальной плоскости

Среди динамических систем выделяют маятник, в режиме малых колебаний его дифференциальное уравнение имеет вид $T^2 \ddot{x} + 2 T\xi \dot{x} + x = 0$, где T – постоянная времени, ξ – коэффициент демпфирования колебаний. После вычисления корней характеристического уравнения выясняется, что

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1/T^2; \quad \beta = \pm \alpha \sqrt{1 + \xi^2}.$$

На модальной плоскости изотаймы, т.е. линии равных постоянных времени T , образуют concentric окружности, а изодемпфы – линии равных коэффициентов демпфирования – радиальные лучи. Изодемпфы с $\xi > 0.7$ ометают секторы повышенной колебательности системы.

Особенности модальной плоскости, связь тех или иных ее областей с характеристиками переходных процессов, используются для алгоритмов назначения спектра. Задача модального синтеза в узкой ее постановке сводится к поиску матрицы обратных связей безынерционного регулятора. Два часто встречаемых в научной литературе подхода представлены на рис. 5.4.2.

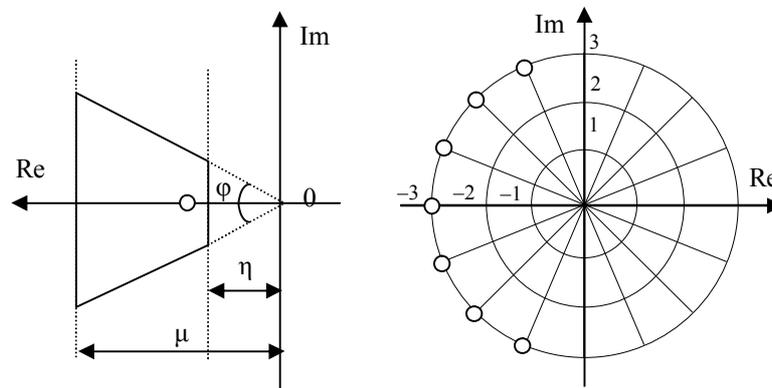


Рис. 5.4.2. Методы размещения спектра

Согласно первому направлению, желаемый спектр размещают внутри трапеции, учитывающей ограничения на степень устойчивости η (минимальное расстояние до мнимой оси), быстроту протекания процесса μ (максимальное расстояние до мнимой оси) и колебательность $\text{tg}\varphi$ (максимальное относительное значение β). Вторым распространенным подходом исходит из принципа симметрии. Он регламентирует, например, равномерное размещение желаемых собственных значений вдоль дуги окружности на равных угловых расстояниях друг от друга.

Некоторое обоснование такое решение находит в положительных качествах фильтра Баттерворта, наделенного симметричным спектром. Однако реальные динамические объекты отличаются от конструируемых фильтров тем, что их свойства фиксированы. Модальный синтез систем не наделен ориентирами для выбора спектра матрицы замкнутой системы. Принципиальная, хотя и несколько ограниченная свобода изменения собственных значений делает невозможной попытку утвердить единственно верный вариант назначения спектра. Рекомендация по итогам исследования состоит в использовании принципа равных пропорций.

Принцип равных пропорций. При последовательной коррекции спектра величины изменений собственных значений следует выбирать прямо пропорциональными мерам их модального доминирования (модальным массам). Чем выше мера, тем более глубокая вариация возможна для точки спектра.

При изменении спектра оценки меняются, синтез выливается в многошаговую процедуру.

Для того, чтобы построить автоматизированную процедуру сжатия синтеза, важно получить линейную зависимость нормы матрицы обратных связей от параметра, управляющего перемещением собственных значений.

Контролируя указанную норму, можно планировать процесс синтеза. Иными словами, в процессе последовательного сдвига собственных значений на комплексной плоскости всегда можно назначить предел для величины перемещения каждого из них, исходя из требуемых гарантий: в зависимости от исчерпанных предыдущими действиями ресурсов, несложно переназначать предел для каждой такой операции. Оказывается, такое планирование возможно.

Техника перемещения одного собственного значения – необходима для модального синтеза в том смысле, что владение элементами этого аппарата освещает путь построения аппроксимационных формул для сдвига нескольких собственных значений.

На рис. 5.4.3 показан спектр матрицы азимутального канала поворота пространственно-механической конструкции (ПМК) радиоантенны. Не только студент, но и специалист, пожалуй, не выберет здесь сразу желаемый спектр, а ведь это только один из рядовых объектов автоматизации, причем, сравнительно небольшой размерности.

Казалось бы, чтобы обеспечить запас устойчивости, надо подтянуть крайние правые собственные значения, расположенные в виде лепестков, но именно они описывают основные тона колебания чаши ПМК.

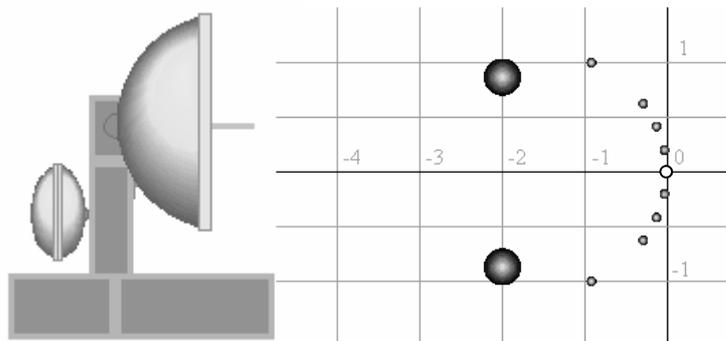


Рис. 5.4.3. Антенна и ее спектр

Демпфировать высокочастотные колебания антенны сервоприводом влечет напрасные траты ресурсов регулятора, ведущие, к тому же, систему к аварии. Между тем, на рисунке размером точек отражены значения мер модальной управляемости собственных значений, а освещенностью точек – значения мер модальной наблюдаемости.

Наиболее управляемыми оказываются полюса сервопривода (слева), чаша антенны видна как интегратор, см. полюс в начале системы координат. Такого сорта анализ заметно облегчает положение исследователя, занятого выбором спектра.

Количество собственных значений не позволяет заниматься каждой модой в отдельности. Желательно использование фактора, обеспечивающего постепенный перенос полюсов, пропорциональный их модальному доминированию. Варьируя величину переноса, получаем контроль над синтезом. Эти соображения несложно реализовать в программе автоматизированного выбора собственных значений, использующей формулу теоремы 2.

Движение точек спектра приводит к переоценке мер, модальная плоскость меняется, см. рис. 5.4.4.

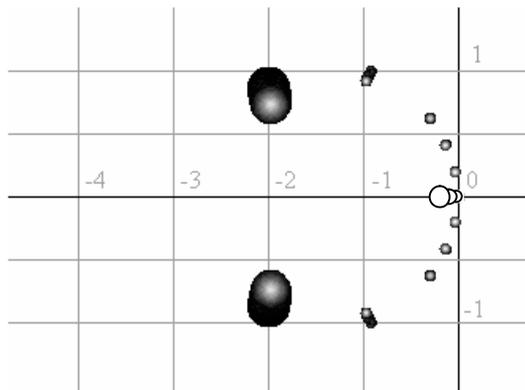


Рис. 5.4.4. Годографы собственных значений

Для непрерывных динамических систем тенденцией, положительно влияющей на улучшение свойств замкнутого объекта, по сравнению с разомкнутым, является перевод собственных значений влево и вниз на верхней полуплоскости, с синхронным изменением комплексно сопряженных собственных значений влево и вверх на нижней полуплоскости, отделяемой вещественной осью, тогда как для дискретных систем такой тенденцией может служить радиальное перемещение собственных значений к центру.

Алгоритмы последовательного изменения спектра реализованы в программном обеспечении VISUAL MATLAB.

5.5. Решение вырожденных задач идентификации

Задачи модального анализа и синтеза, как видно, тесно связаны между собой. В адаптивных системах синтезу регуляторов предшествует идентификация, которая может производиться на основании ганкелева эксперимента, классическим методом наименьших квадратов, и т.д. Однако применение алгоритмов идентификации любым численным методом становится бесполезным, если, в соответствии с подходом Р. Калмана, не удовлетворяются условия идентифицируемости систем. С разработкой критериев идентифицируемости связаны работы автора, в частности [32, 35]. В данном случае пересечение задач анализа и синтеза интересно еще и тем, что возможно введение мер идентифицируемости на основе рассмотренных ранее мер модального доминирования.

Обработка результатов натурального эксперимента с объектом нередко приводит к плохо обусловленным задачам.

Рассмотрим систему уравнений идентификации вида

$$\mathbf{Z} \theta = \mathbf{Y}.$$

относительно вектора оценок параметров θ . Матрица измерений \mathbf{Z} прямоугольная и может быть крайне плохо обусловленной или вырожденной.

Отметим, что анализ потенциальных свойств идентифицируемости систем важен постольку, поскольку раскрывает причины возможного расхождения гарантированно сходящихся, казалось бы, алгоритмов идентификации, к которым относится известный рекуррентный метод наименьших квадратов. Причина некорректного поведения алгоритма может скрываться не в его внутренней ущербности, а в условиях применения алгоритма не по назначению. Далее нас будут интересовать задачи не только плохообусловленные, но и вырожденные.

В середине прошлого, теперь уже, столетия Пенроуз удачно расширил формальное определение обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ понятием матрицы псевдообратной \mathbf{A}^+ , удовлетворяющей четырем условиям

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}, \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+, (\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+, (\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}.$$

Обычная матрица \mathbf{A}^{-1} также удовлетворяет этим соотношениям. Матрица \mathbf{A}^+ единственная, для каждой \mathbf{A} есть своя псевдообратная, для нулевой матрицы \mathbf{A} ее псевдоинверсия $\mathbf{A}^+ = 0$. Фробениусова норма разности

$$\| \mathbf{A}^+ \mathbf{A} - \mathbf{E} \| \text{ или } \| \mathbf{A} \mathbf{A}^+ - \mathbf{E} \|^2$$

отлична от нуля, но она минимальна среди претендентов на роль псевдообратной матрицы.

Нормальное псевдорешение системы линейных уравнений также, как и обычное решение, единственно и записывается в виде

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}^+ \mathbf{Y}.$$

Геометрическая интерпретация нормального псевдорешения состоит в том, что оно является ортогональной проекцией нулевой точки $\boldsymbol{\theta}_0 = 0$ на множество решений вырожденной системы или обобщенных решений, минимизирующих норму разности левой и правой частей несовместной системы $\| \mathbf{Z} \boldsymbol{\theta} - \mathbf{Y} \|^2$.

Нормальное псевдорешение $\boldsymbol{\theta}$ единственно, как проекция нуля оно обладает минимальной нормой на указанном множестве. Иными словами, нормальное псевдорешение наделено примерно теми же свойствами, что и псевдообратная матрица.

Математическое выражение, указывающее путь вычисления проекции любой точки θ_0 , а не только нулевой, имеет вид

$$\theta = \theta_0 + Z^+ (Y - Z \theta_0).$$

Это общее псевдорешение зависит от ряда произвольных постоянных. Изменяя точку θ_0 , мы получаем все новые и новые решения задачи ортогональным проецированием. Для несовместных систем поиск по-прежнему ведется на множестве оценок, минимизирующих норму разности левой и правой частей исходного уравнения.

Разновидность общего псевдорешения уравнения идентификации описывает проецирование точки в пространстве с метрикой, порожденной эллиптической нормой $\| W^{-1}(\theta - \theta_0) \|$, когда $\theta = \theta_0 + Z_w^+ (Y - Z \theta_0)$, где $Z_w^+ = W(ZW)^+$ называется W -взвешенной псевдообратной матрицей. Она обобщает понятие Пенроуза на случай линейных операторов, определенных в пространстве с произвольной метрикой. Формулы работоспособны с матрицами системы нормальных уравнений $P\theta = R$, сведем свойства псевдорешений в таблицу 5.5.1.

Таблица 5.5.1. Формулы псевдорешений.

$\theta = P^{-1}R, \det(P) \neq 0$	$\ P \theta - R \ = 0$
$\theta = P^+ R$	$\min \ P \theta - R \ $ $\min \ \theta \ $
$\theta = \theta_0 + P^+ (R - P \theta_0)$	$\min \ P \theta - R \ $ $\min \ \theta - \theta_0 \ $
$\theta = \theta_0 + P_w^+ (R - P \theta_0), P_w^+ = W(PW)^+$	$\min \ P \theta - R \ $ $\min \ W^{-1} (\theta - \theta_0) \ $
$\theta = \theta_0 + \underline{P}_w^+ (R - P \theta_0), \underline{P}_w^+ = W(\underline{W}P\underline{W})^+ \underline{W}$	$\min \ \underline{W} (P \theta - R) \ $ $\min \ W^{-1} (\theta - \theta_0) \ $

Точки зрения на принцип назначения весовых коэффициентов могут быть различными. Наиболее простой выбор дает соображение равных пропорций, когда элементы диагональной матрицы \mathbf{W} совпадают со значениями элементов $\boldsymbol{\theta}_0$, тогда

$$\|\mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)\| = \sqrt{\left(\frac{\theta_1 - \theta_{01}}{\theta_{01}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\theta_n - \theta_{0n}}{\theta_{0n}}\right)^2}.$$

Пропорционально взвешенная оценка параметров ищется по формуле

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \text{diag}(\boldsymbol{\theta}_0) (\mathbf{Z} \text{diag}(\boldsymbol{\theta}_0))^{+} (\mathbf{Y} - \mathbf{Z} \boldsymbol{\theta}_0).$$

Отметим некоторые преимущества этого подхода, использованного ранее при идентификации по ганкелевым функциям. Очевидно, что он отличается от распространенной теперь уже практики использования нормального псевдорешения, которому отвечает нулевой вектор притяжения. Синтеза полезной информации в таких процедурах не происходит. В отличие также от обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК), здесь весовые коэффициенты уравнивают не невязки измерений, а непосредственно отклонения коэффициентов искомой оценки $\boldsymbol{\theta}$ от коэффициентов вектора притяжения $\boldsymbol{\theta}_0$.

Дисбаланс весовых коэффициентов позволяет выделить наиболее подверженные дрейфу нестационарные параметры. Столь гибкий аппарат управления оцениванием неоправданно мало используется.

Следует иметь в виду, что за качество оценок придется платить сложностью организации численных методов. Их эффективность заключается в учете выделяющихся элементов, но весовые коэффициенты препятствуют балансирующему матрицу системы масштабированию. При неосторожном обращении метод счета ухудшает результат за счет погрешностей.

Вырожденные задачи требуют особой щепетильности, и при различных подходах к очевидно простым, казалось бы, уравнениям параметрического оценивания возникает большое количество проблем, с изучением которых связано дальнейшее обозрение.

Для задач высокой размерности выгода от усложнения цепочки расчета в пошаговых алгоритмах невысока. Можно, конечно, реализовать некоторый смешанный вариант, но еще более перспективно обратиться к методам, основанным на формулах обобщенного псевдорешения с весовыми коэффициентами и без. Довольно часто рассматривается, например, алгоритм Гревилля. К эффективным численным методам он не относится, поскольку наследует относительно быстро растущую, как и у всех схем окаймления, вычислительную ошибку.

Напомним формулы метода окаймления

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{p}^T}{d} & -\frac{\mathbf{p}}{d} \\ -\frac{\mathbf{p}^T}{d} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad d = c - \mathbf{b}^T\mathbf{p}.$$

Метод Гревилля работает с каймой в виде столбца (или строки) и обобщает предыдущий алгоритм на случай любых матриц

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^+ - \mathbf{a}^T\mathbf{p} \\ \mathbf{a}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{p}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{d}^T/\mathbf{d}^T\mathbf{d},$$

старт с $\mathbf{d} = \mathbf{b}$, если $\mathbf{d} = 0$, то $\mathbf{a} = 0$. По ходу счета, если $\mathbf{d} = 0$, то $\mathbf{a} = \mathbf{p}^T\mathbf{A}^+/(1 + \mathbf{p}^T\mathbf{p})$.

Смысл переменных обоих алгоритмов позволяет планировать обработку данных. В самом деле, малый делитель d означает близость к вырожденности матрицы \mathbf{P} , этот признак позволяет сортировать столбцы (и строки, если нужно) с целью повысить эффективность процедуры. В методе Гревилля вектор $\mathbf{A}\mathbf{p}$ является ортогональной проекцией \mathbf{b} на гиперплоскость, образованную ранее обработанными столбцами, входящими

в \mathbf{A} . Отношение норм векторов \mathbf{d} и \mathbf{b} дает синус угла раствора столбца \mathbf{P} по отношению к указанной гиперплоскости, он не превышает единицы. Следовательно, всегда можно назначить не относительный, а абсолютный порог грубости псевдоинверсии. В таком случае рекурсивный алгоритм поиска общего псевдорешения системы уравнений идентификации

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{P}^+(\mathbf{R} - \mathbf{P}\boldsymbol{\theta}_0)$$

сводится к виду

$$\boldsymbol{\theta}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{k-1} - \mathbf{p}q \\ q \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_{0k-1} \\ q_0 \end{pmatrix}, \quad \text{размерность } k=1..n,$$

до тех пор, пока ранг наращиваемой левым верхним углом \mathbf{A} матрицы \mathbf{P} растет, имеем $\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$, $d = \mathbf{c} - \mathbf{b}^T \mathbf{p}$, $q = (r - \mathbf{p}^T \mathbf{R}_{k-1})/d$, в противном случае нижние строки матрицы \mathbf{P} , отвечающие плохо обусловленной части уравнений, игнорируются, а столбцы дорабатываются алгоритмом Гревилля $\mathbf{p} = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$, $q = (q_0 + \mathbf{p}^T (\boldsymbol{\theta}_{k-1} - \boldsymbol{\theta}_{0k-1})) / (1 + \mathbf{p}^T \mathbf{p})$.

Обозначим текущую сумму квадратов невязок $\Delta_k = \|\mathbf{Y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}_{(k)}\|^2$, рекурсивно вычисляемый вектор $\boldsymbol{\theta}_{(k)}$ дополнен до полной размерности нулями, она убывает до тех пор, пока вычисляемый ранг \mathbf{P} нарастает

$$\Delta_k = \Delta_{k-1} - q/d, \quad \Delta_0 = \|\mathbf{Y}\|^2.$$

В данном случае алгоритм оказался поставщиком важной информации, помогающей выбрать опорный элемент. При поиске более сильных в вычислительном отношении продолжений, рассмотрим формулы, построенные при помощи сингулярного разложения матрицы $\mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$ системы уравнений идентификации.

В вырожденных задачах

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}^+ = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T,$$

где $\boldsymbol{\sigma}_k = \text{diag}(\sigma_1 \ \sigma_2 \ \dots)$ – матрица ненулевых сингулярных чисел \mathbf{Z} , выстроенных в порядке убывания; $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{E}$, $\mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{E}$. Разделим окаймляющие матрицы на блоки $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_k \ \mathbf{U}_n]$, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_k \ \mathbf{V}_n]$ в соответствии с делением \mathbf{D} .

Если размер прямоугольной матрицы \mathbf{Z} велик, вместо нее можно использовать симметричное представление $\mathbf{P} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T$ системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов $\mathbf{P} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}$.

Формулу обобщенного псевдорешения можно записать в двух, вариантах $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{Z}^+ (\mathbf{Y} - \mathbf{Z} \boldsymbol{\theta}_0)$ или $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{Z}^+ \mathbf{Y} + (\mathbf{E} - \mathbf{Z}^+ \mathbf{Z}) \boldsymbol{\theta}_0$. Отсюда получаются две ветви алгоритма оценки параметров, см. таблицу 5.5.2.

Таблица 5.5.2. Формулы оценивания параметров.

Размерность σ_k меньше $n/2$	Размерность σ_k больше $n/2$
Общее псевдорешение $\mathbf{Z} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{Y}$	
$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{V}_k (\boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{Y} - \mathbf{V}_k^T \boldsymbol{\theta}_0)$	$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{Y} \\ \mathbf{V}_n^T \boldsymbol{\theta}_0 \end{pmatrix}$
Общее псевдорешение $\mathbf{P} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{R}$	
$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + \mathbf{U}_k (\boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{R} - \mathbf{U}_k^T \boldsymbol{\theta}_0)$	$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_k^{-1} \mathbf{U}_k^T \mathbf{R} \\ \mathbf{U}_n^T \boldsymbol{\theta}_0 \end{pmatrix}$

В практике вычислительной математики двух равноценных путей не бывает, таблица отражает рациональный путь загрузки процессора. Если ранг матрицы Z невысок, первая ветвь алгоритма связана с меньшим объемом вычислений. Второй путь годится для решения невырожденных и вырожденных с матрицей Z высокого ранга систем.

5.6. Идентифицируемость систем

Точное решение задач идентификации любым численным методом становится невозможным, если не удовлетворяются условия идентифицируемости систем. С разработкой критериев идентифицируемости связаны работы автора, в частности [32, 35]. Остановимся на критериях подробнее. Пусть модель линейной однородной системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$.

Определение. Линейная однородная система называется полностью идентифицируемой по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий \mathbf{x}_0 матрица параметров \mathbf{A} может быть однозначно восстановлена за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $\mathbf{x}(t)$.

Иначе, пара $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$ полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар $(\underline{\mathbf{A}}, \mathbf{x}_0)$, объединенных общностью интегральной кривой $\mathbf{x}(t)$, вырождается в точку $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Критерий параметрической идентифицируемости напоминает критерии управляемости и наблюдаемости и для дискретных систем известен как критерий Ли.

Для непрерывных систем этот критерий может быть интерпретирован с привлечением матричной экспоненты. Ниже дается более простой критерий из [34].

Теорема 1. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$ состоит в следующем

$$\text{Rank} [\mathbf{x}_0, \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}_0] = n .$$

Матрицу в квадратных скобках будем называть матрицей идентифицируемости однородной системы и обозначать \mathbf{W}_0 .

Доказательство. Опирается на разложение матричной экспоненты в конечную сумму слагаемых по степеням матрицы системы

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(t) \mathbf{A}^i,$$

где p – степень минимального аннулирующего полинома матрицы \mathbf{A} и $\alpha_i(t)$ – коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа-Сильвестра для экспоненциальной функции, определенной на спектре \mathbf{A} .

Пары $(\underline{\mathbf{A}}, \mathbf{x}_0)$, объединенные общностью интегральной кривой

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i(t) \mathbf{A}^i \mathbf{x}_0$$

порождаются уравнением $(\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{A})\mathbf{x}(t) = 0$, следующим из равенства производных, вычисленных в силу исходной и сравниваемой однородных систем, начальное состояние фиксировано. Функции $\alpha_k(t)$ линейно независимыми между собой на любом интервале времени идентификации, отсюда следует $(\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) [\mathbf{x}_0, \mathbf{A} \mathbf{x}_0, \mathbf{A}^2 \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{A}^{p-1} \mathbf{x}_0] = 0$.

Матрица \mathbf{A} является корнем своего минимального аннулирующего полинома ранга p . Любая ее степень, выше p , выражается через предыдущие, поэтому ранг составной матрицы в квадратных скобках совпадает с рангом матрицы идентифицируемости \mathbf{W}_0 . Система уравнений однозначно разрешима в смысле $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда \mathbf{W}_0 невырождена. Доказательство окончено.

Следствие 1. Множество однородных моделей, порождаемых общностью интегральной кривой, описывается уравнением

$$\underline{\mathbf{A}}\mathbf{W}_0 = \mathbf{A}\mathbf{W}_0.$$

Следствие 2. Проекция произвольной точки \mathbf{C} (матрицы притяжения) на множество, ограниченное выбором начального условия \mathbf{x}_0 , имеет вид

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{C} + (\mathbf{A} - \mathbf{C})\mathbf{W}_0\mathbf{W}_0^+,$$

где $\underline{\mathbf{A}}$ – матрица, наиболее близкая к \mathbf{C} по фробениусовой норме разности $\|\underline{\mathbf{A}} - \mathbf{C}\|$, \mathbf{W}_0^+ – псевдообратная матрица. При $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ имеем $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$.

Следствие помогает перемещаться по множеству неидентифицируемых систем на основе матрицы идентифицируемости. Среди них существует единственная система с минимальной по норме матрицей $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{W}_0\mathbf{W}_0^+$.

Следствие 3. Системы, у которых степень минимального аннулирующего полинома p матрицы \mathbf{A} меньше степени ее характеристического полинома, т. е. $p < n$, неидентифицируемы при любом векторе начального состояния \mathbf{x}_0 .

К неидентифицируемым относится, в частности, система с единичной матрицей $\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Множество однородных систем, разделяющих любую ее интегральную кривую, отслеживает выбор начального условия $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$, не стягиваясь в точку.

Для вектора единичного радиуса получаем

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{C} + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{C} \mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0^T.$$

Рассмотрим, например, однородную систему с единичной матрицей и вектором начальных условий единичного радиуса

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ее поведенческий двойник, минимально отстоящий от устойчивой системы с матрицей $\mathbf{C} = -\mathbf{E}$, имеет матрицу вида

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{C} + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{C} \mathbf{x}_0) \mathbf{x}_0^T = 2 \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Модальный критерий интересен своими аналогиями с теорией ганкелевых собственных функций. Рассмотрим разложение вектора \mathbf{x}_0 пары $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$ в базисе собственных векторов матрицы однородной системы

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{V}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = (\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \dots \mathbf{V}_n),$$

где \mathbf{D} – диагональная матрица собственных чисел, \mathbf{V} – столбцовая матрица собственных векторов, пусть

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{V}_1 \xi_1 + \mathbf{V}_2 \xi_2 + \dots + \mathbf{V}_n \xi_n = \mathbf{V} \xi, \quad \xi \in \mathbb{C}^n.$$

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{W}_0 = \mathbf{V} \operatorname{diag} (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mathbf{W}_\lambda, \quad \mathbf{W}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Невырожденная матрица \mathbf{V} не влияет на ранг \mathbf{W}_0 , поэтому модальный критерий идентифицируемости сводится к виду

$$\operatorname{Rank} (\operatorname{diag}(\xi) \mathbf{W}_\lambda) = n.$$

Определитель матрицы Вандермонда \mathbf{W}_λ равен нулю тогда и только тогда, когда среди собственных значений есть кратные. Отсюда получаем простое решение проблемы идентифицируемости.

Пара $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$ вполне идентифицируема тогда, когда вектор начального состояния возбуждает все собственные движения однородной системы, для некрatных собственных значений $\operatorname{Rank} \mathbf{W}_0 = \operatorname{Rank} (\operatorname{diag} (\xi))$. У систем с кратными собственными значениями $\operatorname{Rank} \mathbf{W}_0 \leq \operatorname{Rank} \mathbf{W}_\lambda < n$, соответствующие собственные векторы определены с точностью нескольких произвольных постоянных и свободно избираются в пределах двумерных и более подпространств, в том числе, ортогонально \mathbf{x}_0 . Такие системы заведомо неидентифицируемы. Этот вывод иллюстрирует следствие 3 теоремы 1.

Модальный аналог следствия 1, помогающий находить множество однородных моделей неидентифицируемых систем, состоит в следующем. Собственные числа и собственные векторы однозначно определяют матрицу. Если убрать из уравнений модального разложения \mathbf{A} ряд собственных векторов (и собственных чисел), не связанных с проекциями \mathbf{x}_0 , то оставшаяся часть уравнений, подобно условию $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{W}_0 = \mathbf{A}\mathbf{W}_0$, определит выбор матрицы $\underline{\mathbf{A}}$ такой, что $\underline{\mathbf{A}}\mathbf{V}_1 = \lambda_1\mathbf{V}_1, \underline{\mathbf{A}}\mathbf{V}_2 = \lambda_2\mathbf{V}_2, \dots, \underline{\mathbf{A}}\mathbf{V}_k = \lambda_k\mathbf{V}_k, k < n$.

Для анализа матриц \mathbf{A} сложной структуры модальное описание исследуемой проблемы становится громоздким. Смысл формулировки условий ее разрешимости сохраняется, во внимание остается возбуждение всех модальных движений, однако проекции на собственные и жордановы векторы, в общем, находятся неоднозначно. В таком случае лучший иллюстративный материал дает теория циклических инвариантных подпространств, помогающая проще обозначить границы области неидентифицируемости.

Практическая сторона дела в вопросе об идентифицируемости состоит в возможности проверить критерий еще до того, как нам стали известны параметры однородной системы.

Теорема 2. Ранг матрицы идентифицируемости \mathbf{W}_0 однородной системы совпадает с рангом матрицы, построенной на выборке динамического процесса $\mathbf{W}_\tau = [\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0+\tau), \dots, \mathbf{x}(t_0+(n-1)\tau)]$; критерий идентифицируемости можно записать в двух эквивалентных формулировках

$$\text{Rank } \mathbf{W}_0 = n \text{ или } \text{Rank } \mathbf{W}_\tau = n.$$

Доказательство. Отсчеты, образующие столбцы матрицы \mathbf{W}_τ , попарно связаны между собой матричной экспонентой $\Phi = e^{A\tau}$, т. е.

$$\mathbf{W}_\tau = [\mathbf{x}(t_0), \Phi\mathbf{x}(t_0), \Phi^2\mathbf{x}(t_0), \dots, \Phi^{n-1}\mathbf{x}(t_0)].$$

В теории матриц последовательностям $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi$ уделено большое внимание. Матрицы, порождающие такой базис, называются циклическими. Циклические инвариантные подпространства матричной экспоненты Φ совпадают с циклическими инвариантными подпространствами матрицы A . Это означает, что в анализе ранга матрицы, построенной на циклической последовательности $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{n-1}\xi$, матрицы A и Φ взаимозаменяемы. Доказательство теоремы окончено.

Следствие. Вычислительные методы идентификации оперируют матрицей метода наименьших квадратов $\mathbf{P} = \mathbf{W}_\tau \mathbf{W}_\tau^T$, построенной для выборки протяженности равной или большей n . Ранг этой матрицы также служит критерием идентифицируемости: $\text{Rank } \mathbf{P} = n$.

Более глубоким следствием той же теории является то, что интегральная кривая однородной системы не покидает циклическое инвариантное подпространство L , образованное вектором \mathbf{x}_0 . В то же время, она не входит во вложенные циклические инвариантные подпространства, покинуть которые будет не в состоянии. Ранг матрицы идентифицируемости можно установить по выборке динамического процесса с произвольным шагом, т. е. $\text{Rank } \mathbf{W}_0 = \text{Rank} [\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_{n-1})] = \dim L$.

Критерий идентифицируемости локализован относительно вектора начального состояния \mathbf{x}_0 . Развернутое представление об условиях идентифицируемости однородных систем дает изучение областей неидентифицируемости.

Определение. Областью неидентифицируемости \mathcal{L} назовем ту область пространства состояний, принадлежность к которой вектора начального состояния свидетельствует о неидентифицируемости пары $(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0)$.

Область неидентифицируемости \mathcal{L} образована совокупностью всех нетривиальных циклических инвариантных подпространств матрицы \mathbf{A} .

Напомним, что подпространство L линейного пространства R^n называется инвариантным относительно матрицы \mathbf{A} , если для каждого вектора \mathbf{x} из L его образ \mathbf{Ax} также принадлежит L . Структура инвариантных подпространств хорошо исследована в матричной алгебре, в частности, у матриц с простым спектром инвариантные подпространства образуются линейными оболочками собственных векторов, на которые имеет проекции вектор \mathbf{x}_0 . Сами собственные векторы являются примерами одномерных инвариантных подпространств. Нулевое подпространство и все пространство называются тривиальными инвариантными подпространствами.

Векторы $\xi, A\xi, A^2\xi, \dots, A^{k-1}\xi$ образуют базис циклического инвариантного подпространства $L \subset R^n$, где k – степень минимального аннулирующего полинома вектора $\xi \in R^n$, т. е. максимальная длина цепочки линейно независимых векторов, индуцированной ξ . Степень p минимального аннулирующего полинома матрицы A ограничивает размерности возможных циклических инвариантных подпространств. Отсюда непосредственно следует, что $\text{Rank } W_0 = k \leq p \leq n$.

В силу особенностей разложения матричной экспоненты интегральная кривая однородной системы не выходит за пределы L циклического инвариантного подпространства вектора x_0 . В то же время, она не входит во вложенные циклические инвариантные подпространства, покинуть которые нельзя по той же причине. Ранее отмечалось то, что ранг матрицы идентифицируемости можно установить по выборке динамического процесса, т. е. $\text{Rank } W_0 = \text{Rank } [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] = \dim L \leq \dim \mathcal{L}$.

Тем самым, вопрос о построении области неидентифицируемости \mathcal{L} , определяющей совокупность начальных состояний и, как видно, процессов, по которым матрица A не может быть идентифицирована, сводится к построению всех возможных нетривиальных циклических инвариантных подпространств $L \subset \mathcal{L} \subseteq R^n$.

Определение. Система, область неидентифицируемости \mathcal{L} которой – все пространство состояний R^n , называется структурно неидентифицируемой.

Следствие 3 из теоремы 1 свидетельствует о том, что линейная динамическая система структурно неидентифицируема в том и только в том случае, когда степень минимального аннулирующего полинома p матрицы A меньше степени ее характеристического полинома n .

Какой бы вектор начального состояния мы ни брали, он всегда оказывается принадлежащим частному циклическому инвариантному подпространству, и интегральная кривая, раскручиваясь в пределах ограниченной области, дает $\text{Rank } [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_{n-1})] < n$.

Для идентификации структурно неидентифицируемых систем необходим не один, а несколько запусков динамического процесса из независимых точек. После того, как интегральные кривые захватят собой все пространство, система становится идентифицируемой. Дополнительное количество независимых запусков динамического процесса, гарантирующее идентифицируемость объекта, оценивается разностью $n-p$.

Мы вплотную подошли к вопросу идентифицируемости по состоянию линейных динамических систем общего вида. Пусть модель линейной неоднородной системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния, $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$; $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор управления.

В теории дифференциальных уравнений существует взаимосвязь между решениями неоднородной и соответствующей ей однородной систем уравнений, а именно: общее решение первой состоит из общего решения второй и какого-либо частного решения неоднородной системы. Вопрос об идентифицируемости систем общего вида допускает аналогичную трактовку вплоть до привлечения матрицы идентифицируемости однородной системы в составной критерий. Вместе с тем, само понятие идентифицируемости неоднородной системы сложнее предыдущего. Как показано, интегральная кривая однородной системы в любом своем фрагменте несет заключительную информацию об объекте, включая условия идентифицируемости. В качестве критерия в равной мере можно привлекать системную матрицу или матрицу выборочных значений процесса. У неоднородной системы информативность интегральной кривой зависит от активности входного воздействия. Следует учитывать, что ближайшие аналоги рассматриваемого системного свойства, понятия управляемости и наблюдаемости, описывают потенциальные свойства системы, а не особенности строения конкретных регуляторов или наблюдателей.

С этой точки зрения полная идентифицируемость, являясь атрибутом системы, а не сигнала, не должна зависеть от способа формирования тестового воздействия. Будучи потенциальным свойством, она гарантирует возможность оценивания параметров при должной активности на входе. Активные сигналы, реализующие потенциальное свойство идентифицируемости, назовем возбуждающими. К ним относятся классические импульсное и ступенчатое воздействия. По характеру влияния на интегральную кривую, импульс в виде дельта функции на входе адекватен дополнительному запуску процесса, поскольку обеспечивает перенос вектора состояния на расстояние, определяемое вектор столбцом матрицы входа.

Это известное в теории управления свойство используется при моделировании импульсных весовых функций заменой импульса на задание необходимого вектора начального состояния. Блочная матрица идентифицируемости однородной системы по нескольким запускам процесса включает в себя системные матрицы идентифицируемости по каждому запуску отдельно. В данном случае роль таких матриц будет играть, очевидно, матрица управляемости. Тем самым мы подходим к простому обобщению известных ранее свойств, наследующему традицию выделения влияния однородной части системы в общем решении задачи. Приведем сначала базовое определение идентифицируемости неоднородной системы, а затем дадим окончательную формулировку критерия.

Определение. Линейная неоднородная система называется полностью идентифицируемой по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий x_0 существует входной сигнал, при котором матрицы ее параметров \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть однозначно восстановлены за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $x(t)$. Иначе, пара $((\mathbf{A}, \mathbf{B}), x_0)$ полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар $((\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}), x_0)$, объединенных общностью интегральной кривой $x(t)$, вырождается в точку $\underline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}$, $\underline{\mathbf{B}}=\mathbf{B}$. В противном случае указанная пара неидентифицируема.

Теорема 3. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $((\mathbf{A}, \mathbf{B}), \mathbf{x}_0)$ состоит в следующем

$$\text{Rank} [\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_B] = n,$$

где \mathbf{W}_0 – матрица идентифицируемости соответствующей однородной системы, \mathbf{W}_B – матрица управляемости $[\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$.

Доказательство этой теоремы опирается на доказательство соответствующей теоремы для однородной системы и на приведенные ранее особенности действия разрывных тестовых сигналов, подаваемых на различные входы системы в различные моменты времени, разделенные между собой конечными отрезками времени идентификации. Разрывные импульсные воздействия позволяют оценить матрицу входа, а принцип суперпозиции гарантирует отделимость действия каждого из воздействий на систему, сводя тем самым, тестовый сигнал к серии испытаний однородной системы запусками из различных начальных условий. Доказательство окончено.

Общая теория систем включает критерий управляемости как необходимое условие минимальности модели. Неминимальная модель содержит неуправляемые части, которые могут быть идентифицированы ввиду влияния вектора начального состояния. Таким образом, системное свойство полной идентифицируемости вполне самостоятельное понятие.

Рассмотрим вопрос идентифицируемости линейных динамических систем в еще более общей его постановке для объектов вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t); \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t),$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния, пусть $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$; $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор входа; $\mathbf{y} \in R^l$ – вектор выхода. Приведем сначала определение идентифицируемости систем по выходу.

Определение. Линейная неоднородная система называется полностью идентифицируемой по вектору выхода, если при заданном векторе начальных условий \mathbf{x}_0 существует входной сигнал, при котором матрицы ее параметров \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} могут быть однозначно восстановлены за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $y(t)$ с точностью до инвариантов канонической формы наблюдаемости.

Иначе, пара $((\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}), \mathbf{x}_0)$ полностью идентифицируема или идентифицируема вполне, когда множество пар $((\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}, \underline{\mathbf{C}}), \mathbf{x}_0)$, объединенных общностью выходного сигнала $y(t)$, при $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, вырождается в точку в базисе инвариантов канонического представления наблюдаемости. В противном случае указанная пара неидентифицируема по выходу.

В этом определении приходится учитывать избыточность расширенного математического описания систем, по параметрам. Известно, что эквивалентными преобразованиями, а, проще говоря, масштабированием вектора состояния можно менять содержимое матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , так что ставить вопрос об идентифицируемости их параметров не имеет смысла. Другое дело, когда структуры матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} фиксированы и число входящих в них коэффициентов, инвариантов эквивалентного преобразования систем, сведено до минимума.

Теорема 4. Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары $((\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}), \mathbf{x}_0)$ состоит в следующем

$$\text{Rank} [\mathbf{W}_0 \mathbf{W}_B] = n, \quad \text{Rank} \mathbf{W}_C = n,$$

где \mathbf{W}_0 , \mathbf{W}_B – системные матрицы идентифицируемости и управляемости, $\mathbf{W}_C = [\mathbf{C}^T, \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T, (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T, \dots, (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]$ – системная матрица наблюдаемости.

Критерии управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем сформулированы как для стационарных, так и для нестационарных систем. Естественно поэтому продолжить тему идентифицируемости переходом к классу нестационарных систем.

Рассмотрим постановку задачи, когда об объекте известно только то, что его параметры, являясь произвольными функциями времени, входят в состав системы линейных нестационарных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{x} \in R^n$ – вектор состояния, пусть $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$; $\mathbf{u} \in R^m$ – вектор входа; $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ – матрицы нестационарных параметров; $t \geq t_0$ – время, будем считать, что $t_0=0$.

Эта постановка помогает раскрыть обстоятельство, придающее исследованию системных свойств стационарных систем самостоятельный характер. Раскроем его на следующем примере. Рассмотрим сначала класс линейных нестационарных однородных динамических систем

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0).$$

Возникает вопрос, возможно ли однозначное восстановление параметров $\mathbf{A}(t)$ системы при наличии полной информации о динамическом процессе $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0$. В данном случае $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица системы. Ответ, в общем, отрицательный. Сформулировать причины параметрической неидентифицируемости нестационарных систем можно следующим образом.

Теорема 5. Система с матрицей $\hat{\mathbf{A}}(t)$, отличной от матрицы исходной системы, порождает тот же самый динамический процесс при данном начальном условии, если они отличаются между собой аддитивной составляющей

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t) + \mathbf{K}(t)(\mathbf{E} - \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^+),$$

где $\mathbf{K}(t)$ – произвольная матрица; $\mathbf{x}(t)$ – вектор решения, найденного в силу исходной системы; $\mathbf{x}(t)^+$ – псевдообратный вектор, т. е. $\mathbf{x}(t)^+ = \mathbf{x}(t)^T / \mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t)$ (и при $\mathbf{x}(t)=0$ имеем $\mathbf{x}(t)^+ = 0$).

Доказательство производится прямой подстановкой модифицированной при помощи аддитивной составляющей матрицы непосредственно в уравнение исходной системы, откуда видно, что уравнение это превращается в тождество, т. к. $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^+ \mathbf{x}(t) = 0$.

Таким образом, параметрическая идентификация нестационарных систем невозможна. Вместе с тем, к ним часто применяются методы, ориентированные на решение задачи идентификации так, как если бы изменяющиеся во времени параметры были постоянны.

Квазиидентифицируемость. Рассмотрим класс нестационарных однородных систем, которому ставится в соответствие класс стационарных систем аналогичного вида

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0).$$

Определение. Линейная нестационарная система называется квазиидентифицируемой (следуя Калману – вполне идентифицируемой) в момент времени t_0 на заданном отрезке времени идентификации протяженности T тогда, когда ей в соответствие может быть поставлена только одна стационарная система, близкая к исходной в смысле минимума квадрата нормы разности векторов их фазовых скоростей, т. е.

$$\int_0^T (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t))^T (\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)) dt \rightarrow \min$$

Рассматривая линейные нестационарные системы, Р. Калман ввел для оценки свойств управляемости и наблюдаемости грамианы

$$\mathbf{G}_B = \int_0^T (\Phi(t, t_0) \mathbf{B} \mathbf{B}^T \Phi(t, t_0)^T) dt; \quad \mathbf{G}_C = \int_0^T (\Phi(t, t_0)^T \mathbf{C}^T \mathbf{C} \Phi(t, t_0)) dt.$$

В задачах идентификации аналогичную роль играет грамиан свободного движения

$$\mathbf{G}_0 = \int_0^T (\Phi(t, t_0) \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \Phi(t, t_0)^T) dt.$$

Можно показать, что линейная нестационарная динамическая система квазиидентифицируема тогда и только тогда, когда матрица \mathbf{G}_0 (грамиан идентифицируемости) положительно определена.

Пример 3. Рассмотрим нестационарную систему с матрицей

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10\cos(t) & 10\sin(t) \\ -10 & 0 & 10\sin(t) & -10\cos(t) \\ -10\cos(t) & -10\sin(t) & 0 & 10 \\ -10\sin(t) & 10\cos(t) & -10 & 0 \end{pmatrix},$$

порождающую, в частности, динамический процесс

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -0.4 & 0.4 & 2.5 & 2.5 \\ 0.4 & 0.4 & -2.5 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(15t) \\ \cos(15t) \\ \sin(14t) \\ \cos(14t) \end{pmatrix}.$$

Нестационарная система и ее аналитическое решение взяты из справочника Камке [65]. Нетрудно проверить, что грамиан идентифицируемости данной системы имеет полный ранг на любом отрезке времени идентификации. Более того, отрезку времени идентификации любой протяженности соответствует одна и та же стационарная система, которая аналитически точно аппроксимирует решение с матрицей \mathbf{A} , отличающейся от матрицы \mathbf{A}_0 с замороженными коэффициентами (взятыми на начальном участке идентификации):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 0 & 10 \\ 11 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 10 \\ -10 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & -10 \\ -10 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя аппроксимирует интегральную кривую нестационарной системы с быстро прогрессирующей погрешностью. Этим подчеркивается, что незначительность изменения параметров по сравнению с быстрым изменением переменных состояния вовсе не приводит, как это принято считать, к сходимости распространенных процедур параметрического оценивания к истинным оценкам параметров. В общем случае имеет место идентифицируемость совсем другого указанного выше типа.

5.7. Учет ограничений на управления

Как видно, в задачах модального синтеза и идентификации существуют критерии управляемости, наблюдаемости, идентифицируемости, имеют место сходные подходы к решению вырожденных задач, а это ведет к формированию общего базиса алгоритмического и программного обеспечения. Рассмотрим также учет ограничений на управляющие воздействия, в этой задаче тоже находят место алгоритмы псевдообращения. Пусть объект управления представлен, в общем, системой нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ – векторы состояния и управления. Допустим, что программа желаемого движения имеет вид $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}, t)$.

Определение. Программа движения называется динамически совместной по отношению к объекту тогда, когда существует вектор управления, при котором движения объекта в любой точке пространства состояний следуют предписанной программе.

Условия динамической совместности объекта и программы дает критерий

$$(\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{B}^+)(\Phi(\mathbf{x},t) - \mathbf{F}(\mathbf{x},t)) = 0,$$

Приравняем векторы фазовых скоростей объекта и программы, отсюда получаем условие движения по программе

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \Phi(\mathbf{x},t), \text{ иначе } \mathbf{B}\mathbf{u}(t) = \Phi(\mathbf{x},t) - \mathbf{F}(\mathbf{x},t).$$

Минимум квадратической нормы разности фазовых скоростей дает нормальное псевдорешение

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^+ (\Phi(\mathbf{x},t) - \mathbf{F}(\mathbf{x},t)).$$

Подстановка его в уравнение абзацем выше приводит к выписанному критерию.

В данном подходе важно то обстоятельство, что вектор фазовой скорости программного движения может соответствовать градиенту некоторой квадратической функции Ляпунова, в таком случае минимизируемый критерий направлен на выполнение условий устойчивости (на обеспечение минимального угла между указанными векторами). В задачах модального синтеза программа естественным образом следует из процедур модального синтеза.

Пусть объект управления представлен теперь системой линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ – векторы состояния и управления, на вектор управления наложены ограничения $\mathbf{a} \leq \mathbf{g}(\mathbf{u}(t)) \leq \mathbf{b}$.

Допустим, что программа желаемого движения имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0),$$

где \mathbf{x}_0 – состояние желаемого равновесия.

Локально оптимальное в смысле минимума квадратической нормы разности скоростей объекта и программы управление внутри допустимой зоны вычисляется по формуле псевдорешения

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{B}^+ (\mathbf{\Phi} - \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}^+ \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_0.$$

Условие динамической совместности объекта и программы, а также условие совместности желаемого конечного состояния, выясненные без учета ограничений на управление, сводятся к уравнениям

$$(\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{B}^+)(\mathbf{\Phi} - \mathbf{A}) = 0, \quad (\mathbf{E} - \mathbf{B}\mathbf{B}^+) \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0.$$

Перейдем к части, в которой учитываются ограничения на управление. Для этого рассмотрим сначала три случая.

Ограничения в виде уравнений связи. Рассмотрим задачу на условный экстремум функции векторного переменного в типичной постановке: $y = f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, ограничения на значения вектора \mathbf{x} заданы системой уравнений, записанных справа.

Составляем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b})^T \boldsymbol{\lambda},$$

Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b} = 0.$$

Ограничения вида односторонних неравенств. Постановка задачи такова, что ограничения на значения вектора \mathbf{x} заданы системой неравенств

$$y = f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}.$$

Предположим, что в точке условного экстремума часть неравенств переходит в равенства, отсортируем $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, \mathbf{b} и $\boldsymbol{\lambda}$ так, чтобы вторые компоненты отражали строгие равенства $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1^T \quad \mathbf{g}_2^T)^T$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1^T \quad \mathbf{b}_2^T)^T$, $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1^T \quad \boldsymbol{\lambda}_2^T)^T$.

Как и прежде, функции Лагранжа в точке экстремума должна быть равна $f(\mathbf{x})$, следовательно в ней $(\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b})^T \boldsymbol{\lambda} = 0$. Это означает, что если имеет место неравенство $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) < \mathbf{b}_1$, то $\boldsymbol{\lambda}_1 = 0$.

Для остальных компонент, наоборот, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) - \mathbf{b}_2 = 0$ и $\boldsymbol{\lambda}_2 = -dL/d\mathbf{b}_2$.

Все это вместе можно записать короче

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \leq 0, \text{ но } \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} \boldsymbol{\lambda}_i = 0 \text{ для каждого } i.$$

Рассмотрим случай, когда ограничения на значения вектора \mathbf{x} заданы двусторонними неравенствами $y = f(\mathbf{x}) \rightarrow \text{extr}, \quad \mathbf{a} \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}$,

Функция Лагранжа расширяется

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{b})^T \boldsymbol{\mu}.$$

Так как в точке экстремума пребывание и на левой и на правой границе неравенства исключается, соответственные компоненты множителей $\boldsymbol{\eta}$ и $\boldsymbol{\mu}$ никогда не бывают равными нулю одновременно. Вместо двух составляющих можно применить комбинированный множитель $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\mu}$.

Знаковые условия разнообразятся, но не более того, точка, подозрительная на условный экстремум, удовлетворяет зависимостям

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{g}^T}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\lambda} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} \leq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}} \geq 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_i} \eta_i = \frac{\partial L}{\partial \mu_i} \mu_i = 0.$$

Условия соблюдения знаковой политики можно объединить в одно $\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\eta}} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}} \leq 0$. На границах левые или правые множители Лагранжа отличны от нуля и соответствуют частным производным функции L по элементам вектора \mathbf{a} или \mathbf{b} , внутри разрешимой зоны они нулевые, соответственно, компоненты $\boldsymbol{\lambda}$ играют роль то левого, то правого отличного от нуля множителя.

Функция Лагранжа на случай двусторонних неравенств составляется в виде $L(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{a})^T \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{g}(\mathbf{u}) - \mathbf{b})^T \boldsymbol{\mu}$, где

$$f(\mathbf{u}) = (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})^T (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}).$$

Компоненты $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\mu}$ играют роль то левого, то правого отличного от нуля множителя. Необходимое условие минимума функции Лагранжа после приведения дает уравнение $\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{B}^T (\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda} = 0$.

Так как остальные управления находятся на упорах, они известны. Подставив это все в уравнение минимума, добираемся до нетривиальной части λ . Знаки множителей Лагранжа должен соответствовать знакам границ

$$\lambda_i < 0, \text{ если } g_i(\mathbf{u}) = a_i, \lambda_i > 0, \text{ если } g_i(\mathbf{u}) = b_i.$$

Результатом синтеза является система с переменной настройкой. Очевидно, что она не обязательно обеспечивает движение объекта по динамически совместной программе в тех случаях, когда органы управления находятся на ограничениях. Однако всегда гарантируется движение объекта наиболее близкое к программе и движение к целевой точке по программе в зоне свободных управлений.

Пример. Рассмотрим линейный объект с двумя входами, и динамически совместную программу с параметрами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заданы ограничения на управление в виде $|u_1| \leq 2, |u_2| \leq 2$.

Приступим к расчету локально оптимального закона управления и границ областей пространства состояний, в которых часть или все управления неизменно находятся на упорах.

Открытая область Ω_0 : пусть $|u_1| < 2, |u_2| < 2$, тогда

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{B}^T (\mathbf{\Phi} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = 0, \text{ отсюда } \mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{\Phi} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Учитывая ограничения, получаем границы $|x_1| < 1, |x_1 - x_2| < 2$.

Области Ω_{11}, Ω_{12} : пусть $|u_1| < 2, u_2 = \pm 2$.

В матрице входа индексами обозначим столбцы $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2]$, тогда свободное управление и множитель Лагранжа находим из

$$u_1 = \mathbf{B}_1^+ (\mathbf{\Phi} - \mathbf{A}) \mathbf{x} - \mathbf{B}_1^+ \mathbf{B}_2 u_2 = -x_1 - x_2 - u_2;$$

$$\lambda_2 = \mathbf{B}_2^T (\mathbf{E} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^+) (\Phi - \mathbf{A}) \mathbf{x} - \mathbf{B}_2^T (\mathbf{E} - \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^+) \mathbf{B}_2 u_2 = x_1 - x_2 - u_2.$$

Учитывая ограничение на управление и правило знаков для множителя Лагранжа, получаем границы, отмеченные на рис. 8.

Области Ω_{21}, Ω_{22} : пусть $u_1 = \pm 2, |u_2| < 2$.

Повторяем все с точностью до наоборот, поскольку теперь зажато первое управление.

Области $\Omega_{31}, \Omega_{32}, \Omega_{33}, \Omega_{34}$: пусть $u_1 = \pm 2, u_2 = \pm 2$.

Релейное управление, вектор $\lambda = \mathbf{B}^T (\Phi - \mathbf{A}) \mathbf{x} - \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}$. Из правила знаков извлекаем граничные неравенства.

Результат моделирования движения системы, выполняющей движение по программе или близкое к нему, с учетом ограничения на управление, приведен на рис. 5.7.1.

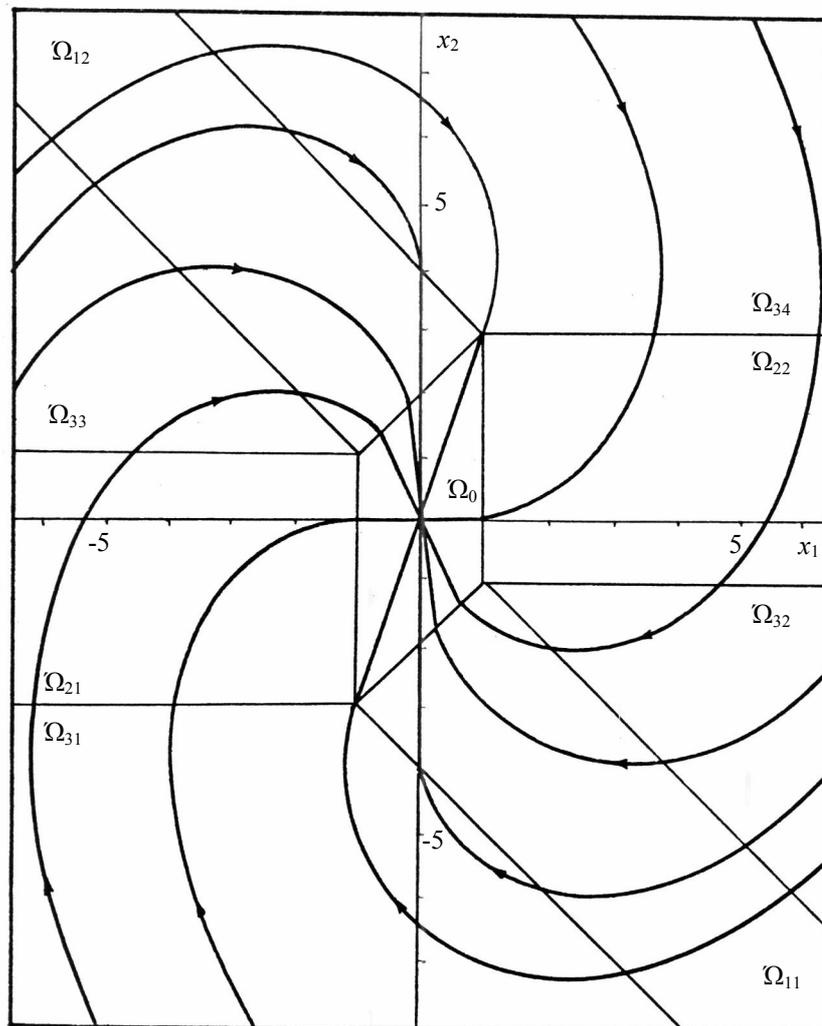


Рис. 5.7.1. Фазовый портрет движения системы

5.8. Алгоритмическое и программное обеспечение

Алгоритмическое и программное обеспечение для решения рассмотренных задач к настоящему времени представлено рядом разработанных автором диссертации пакетов, таких как VISUAL MATLAB, и других, представленных на математических сайтах Exponenta.ru и EqWorld.com. Для поддержки программного обеспечения в сети автором создан сайт artspb.com, вошедший в каталог федеральных общеобразовательных порталов, составленный министерством образования на School.edu.ru, см. рис. 5.8.1.

ARTSPB.COM
Общеобразовательный портал, математика и программирование

Титульная | Математика | Кибернетика | Программирование

Математика, кибернетика и программирование

Портал посвящен современным компьютерным технологиям, математике и средствам визуализации научных исследований, кибернетике и искусственному интеллекту, программированию, позволяющему нам беседовать друг с другом на расстоянии.

- **Компьютерный журнал** Роботы

Общеобразовательный математический портал

- Математика

Портал поддерживает портативный пакет Visual Matlab, совмещающий в себе популярный язык матричных вычислений Matlab, анимационную графику и АЦП-ЦАП интерфейс на базе модулей LCARD. Для сетевых приложений разработана версия этого пакета MatLab On Line, взаимодействующая с сетевыми датчиками непосредственно через Интернет.

- **Matlab On Line** artspb.com/matlab

Кибернетика

- Кибернетический портал

Портал посвящен компьютерным новинкам. Графика Visual Matlab используется для сопровождения компьютерными рисунками музыкальных произведений. Автоматизированный перевод текстов на разных языках в мультфильмы находит, в частности, приложение в сфере анимированных чатботов, синтезирующих в сети диалоговую речь и изображение.

- **Сетевые роботы** artspb.com/avatar

Программирование

- PHP и WAP Программирование

Портал посвящен собственно программированию, системам сетевого зрения, системам дистанционного управления, сетевой телеметрии и прочей интернет-автоматизации.

- **Фотоальбом сайта** artspb.com/album

ресурс ArtSpb.com представлен на EqWorld ! Visual MatLab представлен на Exponenta.ru ! Стар

▲

Санкт-Петербург
-12
-10
10/02
Погода от РБК

Рис. 5.8.1. Сайт поддержки системы VISUAL MATLAB

Математическое обеспечение создавалось с учетом потребностей диссертационной работы, поэтому все алгоритмы, описанные в диссертации, реализованы в VISUAL MATLAB в виде комплексов программ. В частности для генерации матриц линейных операторов используется команда $M=lom(S,t,'опция')$, где $S=[A \ B; \ C \ 0]$ – описание системы, t – вектор отсчетов времени, в качестве опции допустимо использовать следующие обозначения и формулы, принятые в тексте диссертации: $H1=SF$, $H2=FS$, $M=(S+A)/2$, $K=(S-A)/2$, S , SF , FSF , $S+A$, $S-A$, SA , $S+FS$, $S-FS$, $S+SF$, $S-SF$, $FS+SF$, $FS-SF$, T , $H=FT$, T , FT , TF , FTF , $T+FT$, $T-FT$, $T+TF$, $T-TF$, $FT+TF$, $FT-TF$.

С учетом современных тенденций математический инструментарий представлен в сети также пакетом MATLAB ON LINE, позволяющим регистрировать аккаунты пользователей, вести математические исследования с использованием стилизованной версии компьютерного языка матричного исчисления MATLAB, см. рис. 5.8.2.

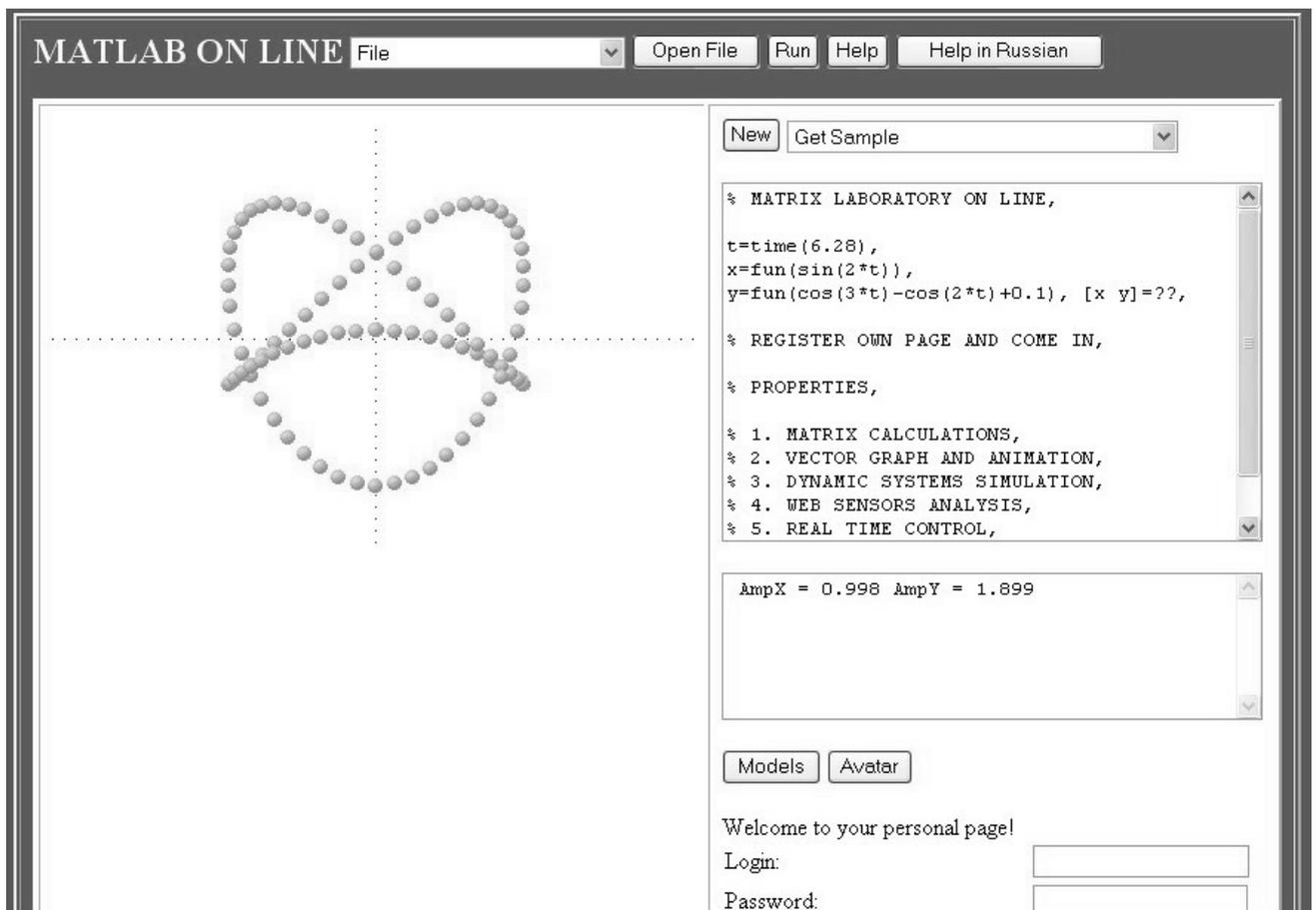


Рис. 5.8.2. Сетевая лаборатория MATLAB ON LINE.

5.9. Выводы

Подведем итоги. Алгебраический критерий управляемости, в соответствии с теоремой Калмана, является показателем реализуемости любого спектра. Однако разные размещения собственных значений на комплексной плоскости по разному достижимы. Пороговые критерии управляемости и наблюдаемости можно дополнить более гибкими мерами модального доминирования.

Принцип двойственности Р. Калмана позволяет использовать полученные меры управляемости для анализа наблюдаемости и идентифицируемости. Анализ потенциальных свойств идентифицируемости систем важен постольку, поскольку раскрывает причины возможного расхождения, казалось бы, гарантированно сходящихся алгоритмов идентификации. Причина некорректного поведения алгоритмов может скрываться не в их ущербности, а в условиях их применения. Гарантии вычислительных методов не распространяются на вырожденные задачи идентификации.

Вырожденные задачи идентификации не являются в принципе нерешаемыми. При наличии дополнительной информации возможно оценивание, учитывающее опорную оценку параметров, и данные эксперимента, недостаточные для построения полной модели динамической системы. Объединение информации из двух источников позволяет создавать новые процедуры параметрического оценивания, применимые также и для обработки результатов, связанных с вычислением и последующим использованием ганкелевых функции.

Созданное алгоритмическое и программное обеспечение существенно облегчает проведение исследований, оно представлено сайтами научной и учебной направленности, учтенными в каталоге федеральных общеобразовательных порталов, составленный министерством образования и науки на School.edu.ru. Детали вынесены в приложение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование математических моделей экспериментов, близких к ганкелевому и осуществлена систематизация соответствующих ассоциированных с динамической системой обобщенных операторов, на основе признаков симметрии. Предложен флип-метод поиска ганкелевых, собственных и сингулярных функций односвязных и многосвязных динамических систем, моделируемых на ограниченном интервале времени. Разработаны матричные численные методы поиска ганкелевых, собственных и сингулярных функций односвязных и многосвязных динамических систем.

Разработан частотный метод поиска собственных и сингулярных чисел и функций динамических систем, с использованием частотной модели флип-оператора. Получены аналитические выражения для характеристических уравнений, собственных и сингулярных функций элементарных звеньев (интегратора, апериодического звена, колебательного звена и прочих). Показана связь классических частотных характеристик динамических систем с собственными или сингулярными числами математических динамических систем, моделируемых на ограниченном интервале времени.

Построены алгоритмы поиска ганкелевых, собственных и сингулярных функций односвязных и многосвязных динамических систем в процессе натурального эксперимента с объектом. Разработаны численные методы идентификации динамических систем на основе ганкелевых, собственных и сингулярных функций односвязных и многосвязных динамических систем.

Практическая ценность результатов работы, помимо статей, решенных примеров и задач, состоит в формировании математического обеспечения, в частности, студии Visual MatLab, соответствующих алгоритмов и программ, используемых в учебном и научном процессах кафедры вычислительных систем и сетей Государственного университета аэрокосмического приборостроения. Результаты исследований использованы также в рамках научных работ Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ).