УДК 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2

МАТРИЦЫ МЕРСЕННА И АДАМАРА, ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Н. А. Балонин[а]*, доктор техн. наук, профессор*
М. Б. Сергеев[а]*, доктор техн. наук, профессор*
[а]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Цель исследования: *показать возможность обобщения кронекерова произведения с последующей коррекцией элементов на малоуровневые квазиортогональные матрицы локального максимума детерминанта для получения матриц того же качества (малоуровневых) высокой размерности, в частности матриц Адамара и Мерсенна.* ***Результаты:*** *показано, что сложность формул коррекции произведения Кронекера малоуровневых квазиортогональных матриц (критских матриц) зависит от типа симметрии сомножителей, порядка их следования и близости размеров сомножителей между собой. Описаны типы возможных сомножителей: виды их симметрии, зависимость симметрии от размера матрицы и ее положения в цепочке критских матриц возрастающих порядков. Приведены таблицы симметрированных матриц. Обобщено произведение Скарпи матрицы Адамара на ее ядро или округленную матрицу Мерсенна; показано, что перестановка симметрированных сомножителей позволяет умножать матрицы Адамара как простых, так и составных порядков. Техника кронекерова произведения расширена на сомножители, разница порядков которых (дистанция) не превышает 4. Показано, что произведение матриц Мерсенна порядков 4t + 1 и Зейделя порядков 4t – 1 порождает регулярные матрицы Адамара с равными друг другу суммами столбцов. Разнесение порядков сомножителей ведет к блочным структурам, в которых отличные от 1 и –1 элементы встречаются только на диагонали.* ***Практическая значимость:*** *алгоритмы нахождения критских матриц использованы при построении исследовательского программного комплекса. Субоптимальные по детерминанту матрицы составляют основу фильтров Мерсенна и Ферма, применяемых для сжатия и маскирования изображений.*

Ключевые слова *— кронекерово произведение, ортогональные матрицы, критские матрицы, матрицы Адамара, конференц-матрицы, матрицы Мерсенна, матрицы Ферма, обобщенный метод Скарпи, циклические матрицы.*

Введение

В статье [1] подводится итог работы с квазиортогональными матрицами локального максимума детерминанта. Основной вывод этого исследования состоит в том, что между числами и экстремальными по детерминанту матрицами существует взаимно однозначное соответствие.

Например, субоптимальные по детерминанту циклические матрицы Зейделя $\mathbf{S}$ порядков (с некоторыми пропусками) $n = 4t + 1$ и циклические матрицы Мерсенна $\mathbf{M}$ порядков $n = 4t - 1$ (без пропусков), t — целое число, строго симметричны или асимметричны соответственно, если n — простое число. Аналогичные матрицы составных порядков состоят из циклических блоков, что отвечает мультипликативному разложению чисел на составные части. Большая часть элементов субоптимальных матриц равна 1, остальные отрицательные элементы меньше по модулю 1. Причем с ростом порядка n значения элементов обоих типов матриц стремятся к 1 и –1 соответственно, но никогда не достигают предельных значений.

Поэтому интересно, что при взаимном вложении матриц $\mathbf{S}$ по месту элементов $\mathbf{M}$ (или наоборот), с учетом знаков, элементы итоговой расширенной квазиортогональной матрицы, называемой *витражом*, могут приблизиться к 1 и –1, а при определенных условиях и стать равными им, когда витраж переходит в недостижимое для оригиналов новое качество. Условия эти отвечают представлению о связи чисел и матриц, так как витраж с элементами 1 и –1 порождают максимально близкие по порядкам матрицы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{M}$ (дополнительное требование такого построения состоит в коррекции структуры диагональных блоков и добавлении каймы). Перед нами матричное обобщение свойств близких пар целых чисел.

Порядок витража размера $(4t + 1)(4t - 1)$, наращиваемого каймой, равен четному числу $n = 4u^2$, u — целое число, это характерный порядок так называемых *регулярных* матриц Адамара $\mathbf{H}$ с элементами 1 и –1, все суммы ортогональных между собой строк и столбцов равны между собой. Если в построении витража используются блоки строго симметричные и асимметричные, то добиться равенства сумм элементов несложно, перед нами, по сути, теория построения регулярных матриц Адамара.

Для четных значений u регулярную матрицу можно построить вложением матрицы Адамара $\mathbf{H}$ порядка $\sqrt{n}$ в саму себя *без каймы*. Она отличается от матрицы с каймой, состоящей из циклических блоков, наличием блоков разной частоты, оцениваемой по количеству смен знаков элементов в столбце (рис. 1).

Необходимое условие существования матриц Зейделя — разложимость порядка в сумму квадратов, регулярные матрицы с ними имеют пропуски. Например, число $n = 4t + 1 = 21$ не раскла-

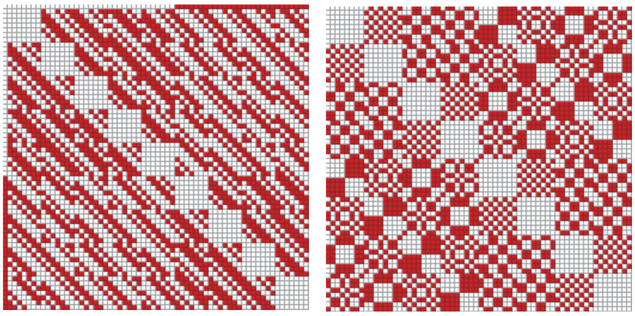


Рис. 1. Блочные регулярные матрицы Адамара с каймой и без каймы

дывается в сумму квадратов, регулярной матрицы размера $n = (4t + 1)(4t - 1) + 1 = 21 \times 19 = 400$ с каймой нет, но $400 = 4u^2 = 20 \times 20$, для четного $u = 10$, соответственно, есть регулярная матрица без каймы.

Выделяют еще, например, матрицы Буша на основе латинских квадратов, без каймы, сегодня известно всего три такие матрицы порядков 36, 100 и 324. Матрица Буша порядка 196 не известна, но она, в свою очередь, легко строится с помощью матриц Мерсенна и Зейделя. К сожалению, для порядка $n = 21 \times 23 = 484$ нет версий отмеченных матриц, а регулярная структура, предположительно, существует.

Хотя все такие матрицы смотрятся как дополняющие друг друга, мы предлагаем не путать их между собой, поскольку они отражают разные по содержанию разложения целых чисел n.

Настоящая статья ставит целью более полно отразить тему матричных вложений *критских* матриц (квазиортогональных матриц с относительно небольшим числом элементов) как обобщений кронекерова произведения для них.

Кронекерово произведение и его обобщения

В теории ортогональных матриц кронекерову произведению $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ отведена роль генератора ортогональных матриц повышенной размерности. Его можно описать как вставку матрицы $\mathbf{B}$ по месту элементов матрицы $\mathbf{A}$ с умножением на эти элементы:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \ldots & a_{nn}\mathbf{B} \end{pmatrix}.$$

Ортогональность — инвариант этого произведения по отношению к возможной замене сомножителей: какие бы ортогональные по столбцам (строкам) матрицы мы ни брали, результатом будет матрица с тем же качеством.

К сожалению, если матрицы-сомножители $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют значения элементов (уровни), отличные от 1 и –1, кронекерово произведение заметно увеличивает их количество. Рост числа уровней нежелателен в том случае, когда матрицы разбиваются на классы эквивалентности в соответствии с количеством и значениями их элементов.

Это касается обобщения матриц Адамара на дополнительные четные и нечетные порядки [1, 2], называемые *критскими матрицами* [3].

Для бинарных критских матриц кронекерово произведение описывает структуру, которую несложно свести снова к бинарной матрице коррекцией ее элементов. Вскоре после первой публикации матриц Адамара [4] на это обратил внимание Скарпи [5], взяв в качестве сомножителей матрицы близких четного и нечетного порядков.

Упрощая метод Скарпи, Пэли [6] исключил из рассмотрения матрицы нечетных порядков. Он воспользовался тем, что трехуровневые конференц-матрицы Белевича [7] четных порядков либо кососимметричны, либо симметричны, что сокращает формулу поправки. Кронекерово произведение матриц Адамара не создает таких проблем, поскольку их элементы имеют значения 1 и –1.

Две конструкции Пэли сводятся к следующему.

Кососимметричная матрица Белевича $\mathbf{C}$ порядка $n = 4t$, t — целое число, дает матрицу Адамара коррекцией нулевой диагонали $\mathbf{H} = \mathbf{C} + \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Ортогональность столбцов — инвариант, не зависящий от значений элемента диагонали.

Результат кронекерова произведения матрицы $\mathbf{C}$ четного порядка $n = 4t - 2$ на матрицу Адамара $\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ порядка $m = 2$ есть матрица Адамара удвоенного порядка $2n$ после аналогичной поправки нулевых элементов первого сомножителя непосредственно в формуле кронекерова произведения $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}+\mathbf{I} & \mathbf{C}-\mathbf{I} \\ \mathbf{C}-\mathbf{I} & -\mathbf{C}-\mathbf{I} \end{pmatrix}$.

При обратной вставке с учетом знаков элементов в матрицу $\mathbf{C}$ матрицы $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{pmatrix}$ поправки касаются, что характерно для реверсных вставок, только диагонали — по месту нулей в $\mathbf{C}$ размещается $\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \\ -\mathbf{H}_{11} & -\mathbf{H}_{12} \end{pmatrix}$.

Отметим, что поправки к кронекерову произведению критских матриц [3] также упрощаются, если брать их в симметричной или антисимметричной форме и использовать реверсную вставку.

Критские матрицы

Критские матрицы — квадратные, ортогональные по столбцам (строкам) матрицы, содержащие небольшое количество различных по значению элементов — уровней. Бинарные критские матрицы имеют всего два уровня $a = 1$ и $-b$, $b \le 1$. Значение b зависит от размера матрицы, эта зависимость называется *функцией уровня*.

На четных порядках $4t - 2$ критские матрицы — бициклические матрицы вида $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. Оба блока **A** и **B** зависят от значений двух элементов $a = 1$ и $-b$.

Порядки $4t - 3$ (или $4t + 1$) сложнее прочих тем, что ортогональность матриц достижима при введении дополнительного уровня d для элементов диагонали (матрицы Зейделя) или каймы s (матрицы Ферма). Формулы для вычисления значения уровней основных семейств критских матриц приведены в табл. 1.

Договоримся обозначать округленные до целых значений критские матрицы Ферма **(F)** порядков $n = 4t + 1$, Адамара **(H)** порядков $n = 4t$, Мерсенна **(M)** порядков $n = 4t - 1$, Эйлера **(E)** порядков $n = 4t - 2$, Зейделя **(S)** порядков $n = 4t - 3$ буквами без подчеркивания. Будем обозначать $\underline{\mathbf{F}}$, $\underline{\mathbf{H}}$, $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{S}}$, соответственно, матрицы, ортогонализованные выбором предписанных значений отрицательных элементов, элементов диагонали и каймы.

Матрицы Эйлера отличаются от других матриц разделяемых четных порядков тем, что это бициклические матрицы, существующие всегда. Они замещают симметричные матрицы Белевича в том случае, если последних нет, а необходимое условие их существования связано с известной в теории чисел теоремой Эйлера — Ферма [1].

Матрица $\underline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$. Матрица $\mathbf{S} = \mathrm{sign}(\underline{\mathbf{S}})$ совпадает с точностью до диагонали с целочисленной матрицей Зейделя (adjacency matrix) матричного описания графов: узлы нумеруются одинаково с номерами строк и столбцов матрицы, взаимно связанные узлы помечаются элементом 1, на диагонали (по договоренности) 0, прочие элементы равны –1. Критские матрицы Зейделя ортогональны по столбцам, они отличаются от целочисленной матрицы Зейделя значениями отрицательных элементов и наличием ненулевых элементов диагонали d.

Симметричные и кососимметричные матрицы

Симметричные и кососимметричные матрицы с нулем на диагонали и прочими элементами 1 и –1 начал исследовать Эрнст Якобсталь, ученик Фробениуса и Шура. В начале прошлого века в диссертации по квадратичным вычетам он выделил близкие к ортогональным целочисленные матрицы, удовлетворяющие матричному уравнению $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = n\mathbf{I} - \mathbf{J}$, где **I**, **J** — единичная матрица и матрица, состоящая полностью из единиц, причем $\mathbf{QJ} = \mathbf{JQ} = \mathbf{0}$.

Циклическая матрица Якобсталя **Q** построена на векторе символов Лежандра $\left(\frac{k}{n}\right)$, где $k = 0, \dots, n - 1$. Она симметрична $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}$ для $n = 4t - 3$ или кососимметрична $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{Q}$ для $n = 4t - 1$, где n — простое число.

Симметричная матрица Якобсталя **Q** порядка $n = 4t - 3$ совпадает с матрицей Зейделя

■ ***Таблица 1.*** Значения уровней семейств матриц

Символ	Порядок n	Матрица	Значения элементов
H	$4t$	Адамара	1, –1
C	$2t$, $4t$	Белевича	1, –1, 0
W	t, $2t$, $3t$, $4t$	Себерри (взвешенная)	1, –1, 0
M	$4t - 1$	Мерсенна	$1, -b$, где $b = \frac{t}{t + \sqrt{t}}$
E	$4t - 2$	Эйлера	$1, -b$, где $b = \frac{t}{t + \sqrt{2t}}$
S	$4t - 3$	Зейделя	$1, -b, d$, где $b = 1 - 2d$, $d = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}$
F	$4t - 3$	Ферма	$1, -b, s$, где $q = n - 1 = 4u^2$, $p = q + \sqrt{q}$, $b = \frac{2n - p}{p} = 1 - \frac{2u - 1}{2u + 1}\frac{1}{u}$, $s = \frac{\sqrt{nq - 2\sqrt{q}}}{p} = \frac{\sqrt{nu - 1}}{2u + 1}\frac{1}{\sqrt{u}}$

теории графов. В теории критских матриц $\mathbf{S} = \mathrm{sign}(\underline{\mathbf{S}}) = \mathbf{Q} + \mathbf{I}$. Наращиванием каймы из единичных элементов матрица **Q** приводится к матрице Белевича **C**.

Кососимметричная матрица Якобсталя **Q** порядка $n = 4t - 1$ порождает матрицу Мерсенна **M** в виде $\mathbf{M} = \mathbf{Q} + \mathbf{I}$. Обратное утверждение не верно. В самом деле, циклические матрицы **M** составных порядков [1], являющихся произведениями пар близких чисел $3 \cdot 5 = 15$, $5 \cdot 7 = 35$ и т. п., не имеют оси симметрии и адекватных им матриц **Q**.

Матрица **M** не обязана быть кососимметричной, множество таких матриц шире, чем множество кососимметричных матриц **Q**.

При построении матриц большое значение имеют цепочки критских матриц [2, 8].

Цепочки критских матриц

Кососимметричные матрицы **M** порядков $n = 4t - 1$ и симметричные матрицы **S** порядков $n = 4t - 3$ сходны вплоть до алгоритмов их построения замещением диагонали матриц **Q**. Тем не менее эти матрицы существенно различаются. Бициклическая форма порождает матрицу Эйлера удвоенного порядка $\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{M}} & \underline{\mathbf{M}} \\ \underline{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} & -\underline{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, матрица Эйлера с каймой приводит к новой матрице **M** отличного на единицу порядка [2].

Возникают цепочки матриц вида **M**–**E**–**M**–**E**–**M**–**E**..., описывающие рост порядков матриц при их рекурсивном вычислении. Матрицы Зейделя не выстраиваются в рекурсии матриц нечетного порядка. Матрица Зейделя порождает только первую матрицу Эйлера. Цепочка имеет вид **(S)**–**E**–**M**–**E**–**M**–**E**... . Скобки означают, что матрица Зейделя не всегда существует. Если матрицы Зейделя нет (невозможно реверсное расщепление стартовой матрицы Эйлера с выделением матрицы Зейделя половинного размера), матрица Эйлера все равно существует. Аналогичные связи существуют между матрицами Адамара и Белевича — матрицы Белевича используются для построения матриц Адамара, если они есть. Отсутствие матриц Белевича не исключает существования матриц Адамара.

Цепочки говорят о том, что матрицы Адамара, Мерсенна, Эйлера можно ранжировать порядковым номером их нахождения в цепочке. У матриц Зейделя порядковый номер всегда начальный. Добавление каймы к матрице **S** дает матрицу **C**. Добавление каймы к матрице **M** дает матрицу **H**. Полная цепочка имеет вид

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{(S)} & - & \mathbf{E} & - & \mathbf{M} & - & \mathbf{E} & - & \mathbf{M}\ -\ldots \\ | & & & & | & & & & | \\ \mathbf{(C)} & & & & \mathbf{H} & & & & \mathbf{H}\ -\ldots \end{array}.$$

Стартовые матрицы цепочек следует выделить особо, это матрицы упрощенной структуры, а их порядки связаны с простыми числами, близкими парами целых чисел, или степенями простых чисел.

Цепочки критских матриц с заданной симметрией

Для получения новых ортогональных матриц с нужными свойствами, если циклическая матрица уже не может быть ортогональной, используются бициклические формы с каймой на порядках, соответствующих аддитивному разложению $n = 2q + 1$, когда

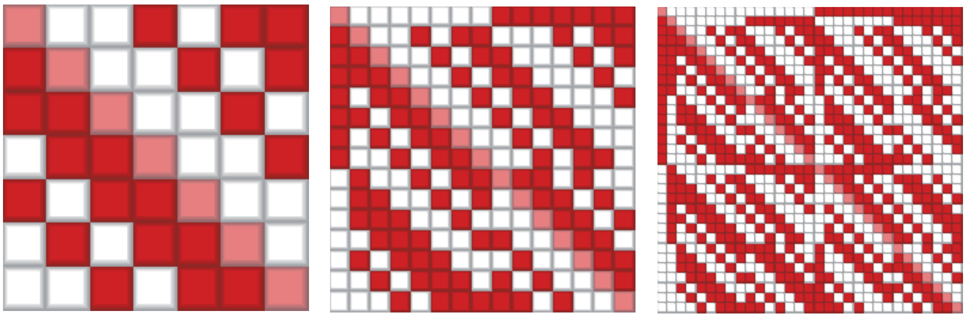
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{e} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{e} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & -\mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Симметричная матрица Зейделя строится на основе блоков **A** и **B** четного порядка, являющихся предикторами разложения симметричной структуры, тогда как составными частями матрицы Мерсенна могут быть как матрицы Мерсенна, так и Зейделя меньшего порядка. Для $q = 4t - 3$, являющегося числом Мерсенна или простым числом, осуществляется переход от кососимметричной циклической матрицы Мерсенна $\mathbf{A} = \mathbf{M}_q$, $\mathbf{B} = \mathbf{M}_q$ порядка q к бициклической матрице Эйлера порядка $2q$ и далее к следующей матрице $\mathbf{M}_n$ порядка $n = 2q + 1$. Для $q = 4t - 1$, являющегося простым числом, циклическая матрица Зейделя $\mathbf{B} = \mathbf{S}_q$ симметрична и дает половину нужного результата. Комплементарная ей кососимметричная матрица **A** ищется отдельно.

Циклические матрицы **M** принадлежат к трем семействам [1] порядков, вложенных в последовательность нечетных чисел $n = 4t - 1$. Это числа Мерсенна вида $2^k - 1$, где k — натуральное число, простые числа и произведения пар простых чисел.

Кососимметричные матрицы соответствуют только первым двум семействам, что повышает их роль в качестве потенциальных сомножителей. Здесь сказывается различие матриц **M**, служащих для построения связанных с ними матриц **H** на единицу большего порядка (или матриц **H** более высоких порядков через рекурсию $n = 2q + 1$, где q — предыдущий порядок), и кососимметричных матриц **M**, соответствующих матрицам **Q**. Вторые пригодны в качестве сомножителей корректируемого кронекерова произведения для построения матриц **H** дополнительных порядков. Для других цепочек матрицы должны быть более тщательно отобраны.

Портреты кососимметричных матриц **Q** порядков 7, 15, 31, входящих в критскую цепочку, приведены на рис. 2.



■ ***Рис. 2.*** Цепочка матриц Якобсталя **Q** порядков 7, 15, 31

Порядок 15 — непростое число, являющееся произведением пар близких чисел $3 \cdot 5 = 15$. Это означает, что существует некососимметрическая циклическая матрица $\mathbf{M}_{15}$, пригодная для построения матрицы $\mathbf{H}_{16}$, но не пригодная как сомножитель корректируемого кронекерова произведения. Вместо нее следует использовать вторую кососимметрическую матрицу приведенной выше критской цепочки.

В связи с разнообразием структур критских матриц возникает необходимость их систематизации по виду симметрии: циклические (Ц) и бициклические (Б) (табл. 2).

Матриц Якобсталя порядков $n = 4t - 3$ нет, если n — не квадрат суммы квадратов двух целых чисел. Эти пропуски невосполнимы — их положение в таблице отличается упорядоченностью: начиная с $n = 21$, сложные порядки следуют с шагом 12.

Следующие с шагом 20 порядки 5, 25, 45, 65 и 85 известны тем, что первая пара 5 и 25 допускает бициклическое решение, промежуточный порядок 45 встречается в теории графов и разрешим в конструкции Матона [9]. Вторая пара 65 и 85 хорошо известна в теории матриц Белевича: это первые неразрешенные порядки. Они требуют уникальной структуры, если она вообще есть.

Максимальная сложность матриц Мерсенна — бицикл с каймой [1], это всего лишь вторая позиция в цепочках критских матриц. Для их поиска применимы методы теории конечных полей Галуа [1]. Матрицы Зейделя входят в состав некоторых бициклических форм матриц Мерсенна, такая симметричная основа вызывает противоречие при поиске кососимметричного варианта решения. Как правило, порядки, связанные с матрицами Зейделя прямо или опосредованно, неразрешимы. Произведение критских матриц требует только кососимметричных структур, поэтому в таблице возникают пропуски.

Кососимметричные матрицы Мерсенна составных порядков существуют, если они являются матрицам критских цепочек, начинающихся от матриц порядков чисел Мерсенна или простых порядков $n = 4t - 1$. Матрицы Зейделя являются

■ ***Таблица 2.*** Циклические и бициклические матрицы Якобсталя

n	Тип	Ц	Б	n	Тип	Ц	Б	n	Тип	Ц	Б	n	Тип	Ц	Б
1	S	+	−	25	S	−	+	49	S	−	+	73	S	+	+
3	M	+	+	27	M	−	+	51	M	−	−	75	M	−	+
5	S	+	+	29	S	+	+	53	S	+	+	77	S	Нет	Нет
7	M	+	+	31	M	+	+	55	M	−	−	79	M	+	+
9	S	−	+	33	S	Нет	Нет	57	S	Нет	Нет	81	S	−	+
11	M	+	+	35	M	−	−	59	M	+	+	83	M	+	+
13	S	+	+	37	S	+	+	61	S	+	+	85	S	−	−
15	M	−	+	39	M	−	+	63	M	+	+	87	M	−	+
17	S	+	+	41	S	+	+	65	S	−	−	89	S	+	+
19	M	+	+	43	M	+	+	67	M	+	+	91	M	−	−
21	S	Нет	Нет	45	S	−	−	69	S	Нет	Нет	93	S	Нет	Нет
23	M	+	+	47	M	+	+	71	M	+	+	95	M	−	+

предикторами цепочек — это матрицы без предыстории. Соответственно, два последних столбца таблицы составлены на основании оптимистических предположений о матрицах Зейделя высоких порядков и нуждаются в проверке.

Первый критический порядок, на котором нет ни циклической, ни бициклической кососимметричных матриц, — 35. Такие числа возникают во многих задачах теории ортогональных матриц, это первый критический порядок для матриц Вильямсона. Порядки 9, 25, 27, 81 — степени простых чисел 3 и 5, для которых существуют блочные матрицы Якобсталя, находимые по рекурсивным формулам Белевича: $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} - \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}$ соответствует квадрату порядка, $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}$ — кубу порядка. С ними связаны порядки $51 = 2 \cdot 25 + 1$, $55 = 2 \cdot 27 + 1$, для которых нет циклической и бициклической структур, но есть промежуточные структуры.

Гипотеза о кососимметрии всех матриц Мерсенна

Отсутствие циклической структуры не означает, что матрицы нет вообще. Кососимметрические матрицы Мерсенна есть для любых выделенных им порядков. Это не доказанное предположение, но оно следует из связи матриц Мерсенна с кососимметричными матрицами Адамара [1].

Порядки, равные числам Мерсенна, выделены тем, что существование решения в виде кососимметричной циклической матрицы не зависит от их простоты.

К ним примыкают матрицы, построенные для простых чисел $n = 4t - 1$. Остальные кососимметричные матрицы должны быть блочными, каковыми являются матрицы критских цепочек. Параметры элементов первых строк **a**, **b** циклических блоков **A** и **B** матриц Якобсталя приведены в табл. 3.

■ *Таблица 3.* Первые строки бициклических матриц Якобсталя

n	q	Тип	Первая строка **a** блока **A**	Первая строка **b** блока **B**
3	1	**M**	[0]	[1]
5	2	**S**	[0,1]	[–1,1]
7	3	**M**	[0,1,–1]	[1,1,–1]
9	4	**S**	[0,1,–1,1]	[1,1,–1,–1]
11	5	**M**	[0,1,–1,1,–1]	[1,1,–1,–1,1]
13	6	**S**	[0,–1,1,1,1,–1]	[–1,–1,1,1,–1,1]
15	7	**M**	[0,1,1,–1,1,–1,–1]	[1,1,1,–1,1,–1,–1]
17	8	**S**	[0,–1,1,1,–1,1,1,–1]	[1,1,1,–1,–1,–1,1,–1]
19	9	**M**	[0,–1,–1,–1,1,–1,1,1,1]	[–1,1,1,–1,1,–1,1,1,–1]
21	10	**S**	Нет	Нет
23	11	**M**	[0,1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1]	[1,1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1]
25	12	**S**	[0,1,–1,–1,1,1,–1,1,1,–1,–1,1]	[1,–1,1,1,1,1,–1,–1,–1,–1,1,–1]
27	13	**M**	[0,–1,1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1,1]	[1,1,–1,1,1,–1,–1,–1,–1,1,1,–1,1]
29	14	**S**	[0,1,–1,1,–1,–1,1,1,1,–1,–1,1,–1,1]	[1,–1,–1,1,1,–1,1,1,1,1,–1,–1,–1,–1]
31	15	**M**	[0,1,–1,–1,–1,–1,1,–1,1,–1,1,1,1,1,–1]	[1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,1,–1,1,1,–1,–1]
33	16	**S**	Нет	Нет
35	17	**M**	$\mathbf{Q}_{35} = \mathrm{core}(\mathbf{H}_{36})$	
37	18	**S**	[0,–1,1,–1,–1,1,–1,1,1,1,1,1,–1,1,–1,–1,1,–1]	[1,1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1,–1]
39	19	**M**	[0,1,–1,–1,1,1,1,1,–1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1,1,1,–1]	[1,1,–1,–1,1,1,1,1,–1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1,1,1,–1]
41	20	**S**	[0,1,1,1,–1,–1,1,–1,1,–1,–1,–1,1,–1,1,–1,–1,1,1,1,1]	[1,1,1,1,–1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1]
43	21	**M**	[0,1,1,1,1,1,–1,–1,1,1,–1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,–1,–1,–1]	[–1,1,1,1,–1,1,–1,1,–1,–1,1,–1,–1,1,–1,1,–1,1,1,1,–1]
45	22	**S**	$\mathbf{Q}_{45}$ имеет структуру Матона [9]	
47	23	**M**	[0,1,1,1,1,–1,1,–1,1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,1,–1,1,–1,–1, –1,–1]	[1,1,1,1,1,–1,1,–1,1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,1,–1,1,–1,–1, –1,–1]

Окончание табл. 3

n	q	Тип	Первая строка **a** блока **A**	Первая строка **b** блока **B**
49	24	**S**	[0,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1,1,1,–1,–1,–1,1,1,–1,1,–1,–1, –1,1,1,1]	[1,–1,–1,1,1,–1,1,1,1,1,–1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1,1,–1, –1,1,1,–1]
51	25	**M**	$\mathbf{Q}_{25} = \mathbf{Q}_5 \otimes \mathbf{Q}_5 + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} - \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}$	
53	26	**S**	[–1,1,–1,–1,1,–1,–1,1,1,1,1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,–1,–1, 1,1,–1,1,1,–1,1]	[0,1,–1,–1,–1,–1,1,–1,1,1,1,–1,1,1,1,–1,1,1,1,–1,1,–1, –1,–1,–1,1]
55	27	**M**	$\mathbf{Q}_{27} = \mathbf{Q}_3 \otimes \mathbf{Q}_3 \otimes \mathbf{Q}_3 + \mathbf{Q}_3 \otimes \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} \otimes \mathbf{Q}_3 +$ $+ \mathbf{J} \otimes \mathbf{Q}_3 \otimes \mathbf{I}$	
57	28	**S**	Нет	Нет
59	29	**M**	[0,1,–1,–1,–1,–1,–1,1,1,–1,1,–1,1,–1,–1,1,1,–1,1,–1, 1,–1,–1,1,1,1,1,1,–1]	[1,1,–1,–1,1,1,1,1,–1,1,–1,–1,–1,1,–1,–1,1,–1,–1,–1, 1,–1,1,1,1,1,–1,–1,1]
61	30	**S**	[0,1,–1,–1,1,1,–1,–1,1,–1,1,1,1,–1,–1,–1,–1,–1,1,1,1, –1,1,–1,–1,1,1,–1,–1,1]	[1,–1,1,1,–1,1,–1,–1,–1,–1,–1,1,–1,–1,–1,1,1,1,–1,1, 1,1,1,1,–1,1,–1,–1,1,–1]
63	31	**M**	[0,1,1,–1,1,1,–1,1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1,1,–1,1,1,1,–1, –1,–1,–1,1,–1,–1,1,–1,–1]	[1,1,1,–1,1,1,–1,1,1,1,1,–1,–1,–1,1,–1,1,–1,1,1,1,–1, –1,–1,–1,1,–1,–1,1,–1,–1]

Из гипотезы о кососимметрии следует, что трудности в поиске сомножителей корректируемого кронекерова произведения есть, но они преодолимы. Для матрицы $\mathbf{S}_{17}$ нет комплементарной кососимметрической матрицы, в этом случае матрица $\mathbf{M}_{35}$ строится, например, широко используемым усечением кососимметричного массива Вильямсона — Себерри [12], состоящего из четырех циклических блоков. Цепочки критских матриц интересны тем, что дают заметно более простые формы.

Произведение Скарпи

Около ста лет назад итальянский математик Умберто Скарпи вставил матрицу Адамара порядка $4t$ в ее собственный блок без каймы порядка $4t-1$. В нашей классификации — в матрицу Мерсенна. Оказалось, что ортогонализация столбцов (и строк) такого вложения возможна при циклическом смещении блока матрицы Адамара пропорционально мере расстояния (в виде произведения индексов) замещаемого элемента от левого верхнего угла матрицы.

Опишем этот метод в нашей редакции заметно короче, чем в оригинале [5], — одной формулой кронекерова произведения с коррекцией (произведение Скарпи $\times$) в виде описанного Скарпи смещения, используя понятие нормальной формы матрицы Адамара и ее основы (core).

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & m_{11}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{11}\mathbf{e} & \mathbf{M} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & m_{12}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{12}\mathbf{e} & \mathbf{M} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} -1 & m_{1(n-1)}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{1(n-1)}\mathbf{e} & \mathbf{M} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & m_{21}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{21}\mathbf{e} & \mathbf{M} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & m_{22}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{22}\mathbf{e} & \mathbf{TM} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} -1 & m_{2(n-1)}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{2(n-1)}\mathbf{e} & \mathbf{T}^{n-2}\mathbf{M} \end{pmatrix} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \begin{pmatrix} -1 & m_{(n-1)1}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{(n-1)1}\mathbf{e} & \mathbf{M} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & m_{(n-1)2}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{(n-1)2}\mathbf{e} & \mathbf{T}^{n-2}\mathbf{M} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} -1 & m_{(n-1)(n-1)}\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ m_{(n-1)(n-1)}\mathbf{e} & \mathbf{T}^{(n-2)(n-2)}\mathbf{M} \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & \mathbf{M} \end{pmatrix}$ — матрица Адамара; $\mathbf{M} = -\mathrm{core}(\mathbf{H})$ — округленная до целых значений элементов матрица Мерсенна; $\mathbf{e}$ — вектор единичных элементов каймы; $\mathbf{T}$ — матрица циклического смещения. Каждый блок смещается на величину произведения $(i-1)(j-1)$, при этом смещать можно как строки, так и столбцы — процедура симметрична. Знак замещаемого элемента переносится только на элементы каймы.

С помощью алгоритма Скарпи нашел новую матрицу Адамара высокого составного порядка $7 \cdot 8 = 56$ [5]. Метод не зависит от вида матрицы Мерсенна (она может быть любой, не кососимметрической), но подходит только для простых порядков $4t-1$. В общем случае метод дает ошибку — требует более громоздкой коррекции.

Однако нами замечено, что произведение Кронекера с коррекцией можно использовать для любых порядков, а не только простых. Это не отмечалось ранее, поскольку такими произведениями мало кто занимался. Так как оригинальный алгоритм работал только для простых порядков, естественны попытки обобщить такой алгоритм на степени простого числа, но более серьезное обобщение исключает требование простоты как несущественный фактор.

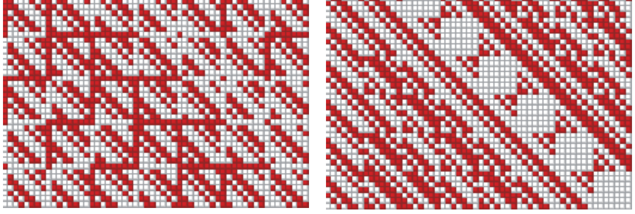
Решение проблемы состоит в том, что при обратном следовании асимметричных сомножителей смещения не нужны: в таком случае коррекция сводится к смене знака отрицательных элементов диагональных матриц $\mathbf{M}$. Таким образом, при округлении до целых на диагонали возникает $\mathbf{J}$ — матрица из единичных элементов порядка матрицы $\mathbf{M}$. Как и в разобранном Пэли умножении матриц Белевича, простота коррекции зависит в первую очередь от типа симметрии сомножителей.

Обобщенное произведение Скарпи (generalized Scarpis method) имеет вид $[\mathbf{H} \otimes \mathbf{M}] = \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} + (\mathbf{H} - \mathbf{I}) \otimes \mathbf{M}$, $\mathbf{M} = -\mathrm{core}(\mathbf{H})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица, аннулирующая диагональные элементы асимметричной матрицы Адамара

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & -\mathbf{M} \end{pmatrix}.$$

Матрицы Адамара, полученные методом Скарпи для двух описанных выше реализаций, представлены на рис. 3.

Вторая более общая формула произведения Скарпи справедлива для порядков матриц Мерсенна в виде простых чисел 3, 7, 11, произведений близких целых $3 \cdot 5 = 15$ и $7 \cdot 5 = 35$, степени простого числа $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ и прочих составных порядков. Из матрицы Мерсенна порядка 27 получим матрицу Адамара порядка 756 (оригинальным методом это сделать невозможно). После публикации работы Пэли [6] метод Скарпи со смещениями был почти забыт, комментарии к нему редки. Его обобщение, не зависящее от блочного вида асимметричной матрицы $\mathbf{M}$, мы привели впервые в работе [1].



■ *Рис. 3.* Матрицы Адамара порядка 56, полученные двумя методами Скарпи

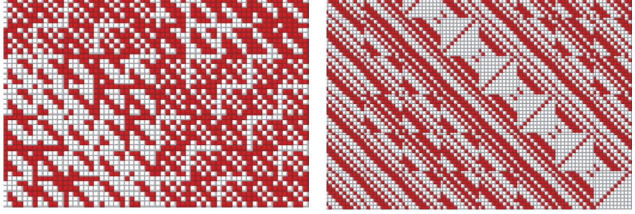
Обратный метод Скарпи

В прямом методе Скарпи к матрице $\mathbf{M}$ добавляется кайма. С ее помощью строится матрица Адамара, вставляемая в матрицу Мерсенна с циклическим смещением внутреннего блока. Кайма, являясь компенсатором, может как добавляться, так и удаляться. Произведем удаление каймы, назвав новый метод *обратным* методом Скарпи. Он является таким же общим, как и прямой метод Скарпи, но позволяет вычислять матрицы Адамара иных порядков.

Возьмем матрицу $\mathbf{M}$ в форме бицикла с каймой $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{e} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & -\mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ порядка $2q + 1$, удалим кайму как компенсатор, ставший ненужным. Бициклическая основа матрицы $\mathbf{M}$ имеет четный порядок $2q$. Разделим ее по строкам и столбцам, выделив два блока нечетного порядка $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и построим их формальные расширения $[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$, $[\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$. Блоки квадрируем $\times$ по Скарпи (применяем описанный выше одной формулой алгоритм к блокам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$), получаем расширенную матрицу Адамара $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} \times [\mathbf{A}] & \mathbf{B} \times [\mathbf{B}] \\ -(\mathbf{B} \times [\mathbf{B}])^{\mathrm{T}} & (\mathbf{A} \times [\mathbf{A}])^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$ порядка $2q(q + 1)$.

Прямой метод Скарпи применим только к матрицам Мерсенна и исключает матрицы Зейделя, поскольку последние (как и матрица Белевича), будучи началом самостоятельной цепочки матриц, не выражаются через матрицы более низких порядков. В обратном методе, напротив, симметричный блок $\mathbf{B}$ кососимметричной матрицы Мерсенна $\mathbf{M}$ порядка 11 может быть матрицей Зейделя порядка $q = 5$, например. Получаемая из таких блоков матрица $\mathbf{H}$ порядка $2q(q + 1) = 60$ приведена на рис. 4.

Такие продолжения не единственны. Во втором нашем независимом продолжении прямого метода Скарпи матрица Адамара умножается



■ *Рис. 4.* Матрицы Адамара порядков 60 и 88 на матрицу Мерсенна [$\mathbf{H} \otimes \mathbf{M}$] не ниже, а выше нее по порядку. Чтобы при разнице 3 между порядками сомножителей не усложнять блоки на диагонали, для вставки следует выбирать циклическую матрицу Мерсенна — компенсатором служит матрица с –1 на антидиагонали. Для матриц $\mathbf{H}$ порядка $11 - 3 = 8$ и $\mathbf{M}$ порядка 11 кронекеровым умножением получим матрицу Адамара порядка 88 (см. рис. 4).

Произведение матриц Мерсенна и Зейделя

Перемножение парных матриц Мерсенна и Зейделя с коррекцией дистанции 2 между их порядками (рис. 5) — обобщение произведения пар близких целых чисел на произведение матриц.

Основу нового метода составляет тот факт, что формула Белевича квадрирования порядка матрицы Якобсталя $\mathbf{Q} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} - \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}$ может быть обобщена двумя возможными способами.

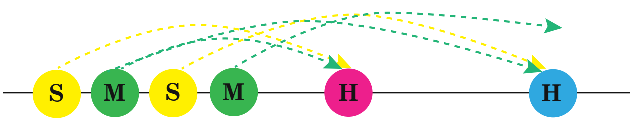
Формула $\mathbf{Q} = \mathbf{Q_S} \otimes \mathbf{Q_M} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} - \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}$ описывает вставку кососимметричной матрицы Якобсталя $\mathbf{Q_M} = \mathbf{M} - \mathbf{I}$ в симметричную матрицу Якобсталя $\mathbf{Q_S} = \mathbf{S} - \mathbf{I}$.

Обратная вставка $\mathbf{Q} = \mathbf{Q_M} \otimes \mathbf{Q_S} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{J} - \mathbf{J} \otimes \mathbf{I}$ также возможна. Размеры единичной $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ согласованы с порядками сомножителей.

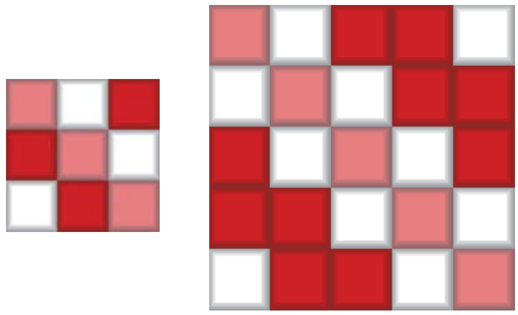
Для получения матрицы Адамара необходима еще кайма, коррекцию произведения Кронекера обозначим квадратными скобками. При вычислении $\mathbf{H} = [\mathbf{S} \otimes \mathbf{M}]$ парные матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{Q_M} - \mathbf{I}$ и $\mathbf{B} = -(\mathbf{Q_M} + \mathbf{I})$ замещают положительный и отрицательный элементы первого сомножителя, осевые блоки состоят из $\mathbf{J}$, построение завершается каймой из 1.

При вычислении $\mathbf{H} = [\mathbf{M} \otimes \mathbf{S}]$ парные матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{Q_S} - \mathbf{I}$ и $\mathbf{B} = -(\mathbf{Q_S} + \mathbf{I})$ замещают положительный и отрицательный элементы первого сомножителя, осевые блоки состоят из $\mathbf{J} - 2\mathbf{I}$, построение завершается каймой из 1, исключая начальный элемент –1.

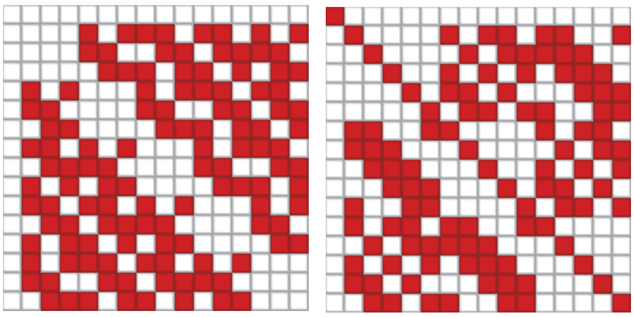
В примерах взаимных произведений возьмем матрицы Якобсталя $\mathbf{Q_M}$ порядка 3 и $\mathbf{Q_S}$ порядка 5 (рис. 6). Кососимметричная матрица дает матрицу $\mathbf{M}$, симметричная матрица дает матрицу $\mathbf{S}$. Брать их можно как в циклической, так и бициклической форме, поскольку бициклическая имеет ту же ось симметрии.



■ *Рис. 5.* Расчет матриц Адамара парными матрицами



■ *Рис. 6.* Циклические матрицы Якобсталя порядков 3 и 5



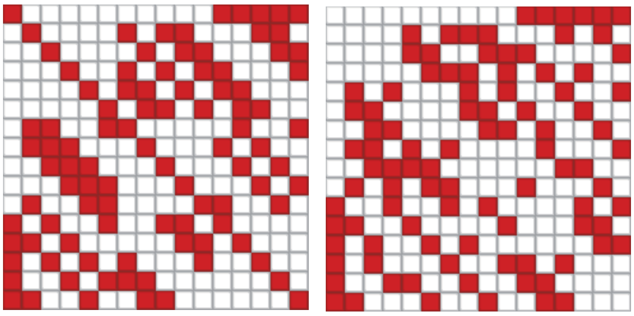
■ *Рис. 7.* Прямая и обратная матрицы-витражи порядка 16

Вставку будем называть *матрицей-витражом*. Пусть $n = 3 \cdot 5 + 1 = 16$. Матрица $\mathbf{M}_3$ образует витраж $\mathbf{H}_{16} = [\mathbf{S}_5 \otimes \mathbf{M}_3]$ с матрицей $\mathbf{S}_5$. Матрица $\mathbf{S}_5$ образует витраж $\mathbf{H}_{16} = [\mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{S}_5]$ с матрицей $\mathbf{M}_3$. Матрицы-витражи, отличающиеся диагональными блоками и начальным элементом каймы, приведены на рис. 7.

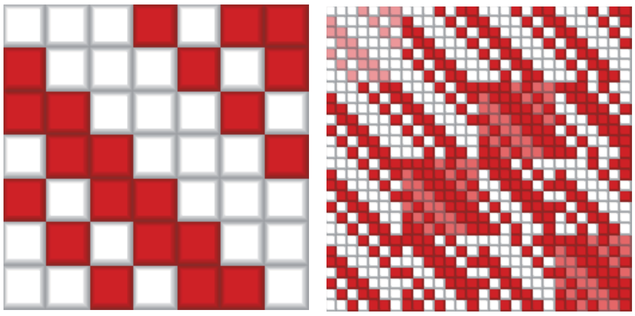
Вычисление регулярных матриц Адамара

Теперь мы подошли к задаче вычисления матриц с равными суммами строк и столбцов (регулярных матриц), поставленной во введении. Для выравнивания сумм строк и столбцов прямую и обратную матрицы-витражи нужно *нормализовать* инверсией знаков строк и столбцов, захватывая неуравновешенную вторую половину блоков. Без учета первого блока количество блоков является нечетным числом. В примере выше это дает регулярные матрицы Адамара порядка 16 (рис. 8).

Инверсия строк и столбцов — операция легко выполнимая, поэтому переход к регулярным матрицам оказывается простым и не требует сколь-нибудь подробных комментариев. Матрицы Мерсенна и Зейделя пар близких порядков находятся на расстоянии 2. Оно привлекательно тем, что их произведение с каймой дает порядки $4u^2 = n(n+2) + 1$ вида 4, 16, 36, 100, 144, 196, 256, 324 и т. п., не найденная в форме Буша матрица



■ *Рис. 8*. Регулярные матрицы Адамара порядка 16



■ *Рис. 9*. Матрица Мерсенна и Пропус $\mathbf{H}_{28}$

196-го порядка приведена нами в работе [10]. Для простых порядков имеем: $1 \cdot 3 + 1 = 4$, $3 \cdot 5 + 1 = 16$, $5 \cdot 7 + 1 = 36$, $11 \cdot 13 + 1 = 144$, $17 \cdot 19 + 1 = 324$, $29 \cdot 31 + 1 = 900$, $41 \cdot 43 + 1 = 1764$. Добавим к ним матрицы, находимые с помощью бициклов с каймой: $13 \cdot 15 + 1 = 196$, $37 \cdot 39 + 1 = 1444$. Матрицы Якобсталя степеней простых порядков могут быть найдены при помощи формул Белевича, они дают порядки $7 \cdot 9 + 1 = 64$, $9 \cdot 11 + 1 = 100$, $25 \cdot 27 + 1 = 676$, $49 \cdot 51 + 1 = 2500$, $53 \cdot 55 + 1 = 2916$. Матрица Якобсталя порядка 45 конструкции Матона [9] дает порядок $45 \cdot 47 + 1 = 2116$. Для вычисления матриц порядков $\mathbf{21} \cdot 23 + 1 = 484$, $\mathbf{33} \cdot 35 + 1 = 1156$ и т. п. нет соответствующих им матриц Зейделя, — пробел, связанный с принципиальными особенностями числовой системы.

Вычисление матриц Ферма

Матрицы Ферма — производные от регулярных матриц Адамара критские матрицы нечетных порядков $n = 4t + 1$, отличающиеся от них уровнем отрицательного элемента и каймой со значениями s. Матрицы Ферма рассмотрены нами в работе [11]. Показанная ниже структура охватывает все перечисленные в табл. 1 критские матрицы, исключая лишь взвешенные:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{(S)} & - & \mathbf{E} & - & \mathbf{M} & - & \mathbf{E} & - & \mathbf{M} \; -\ldots \\
| & & & & | & & & & | \\
\mathbf{(C)} & & & & \mathbf{H} & & & & \mathbf{H} \\
 & & & & | & & & & \\
 & & & & \mathbf{F} & & & &
\end{array}$$

Возможность существования матриц Ферма обусловлена регулярностью матриц Адамара порядков, равных произведениям пар целых чисел. Порядок, на котором заканчивается ответвление одной цепочки, служит началом другой.

Блочные критские матрицы (Проклы и Пропусы)

При разнесении порядков сомножителей (матриц Зейделя или Мерсенна) описанная выше структура витража не меняется. Более того, внедиагональные блоки по-прежнему можно считать блоками с элементами, равными 1 и –1. В данном случае отсутствует компенсатор, тем самым витраж является примером составной критской матрицы с настраиваемыми элементами диагональных блоков.

Свобода выбора структуры диагональных клеток велика.

На диагонали может стоять клетка Зейделя или Мерсенна, назовем такую структуру *гофр*, одиночная *складка* типа матрицы $\mathbf{J} - 2\mathbf{I}$ и, наконец, блок вида $\mathbf{J}$, но не с единичными элементами (масштабируемый монотонный блок). Так как количество диагональных блоков невелико, оно равно порядку сомножителя (а не порядку всей матрицы), такие произведения аппроксимируют матрицы Адамара с малой погрешностью.

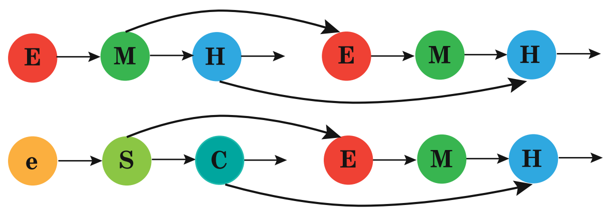
Например, каждая вторая матрица Эйлера порядков $n = 4t - 2$, построенная на паре матриц Мерсенна в виде $\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{M}} & \underline{\mathbf{M}} \\ \underline{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} & -\underline{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, может быть упрощена приравниванием элементов внедиагональных блоков 1 и –1. Эта параметрическая разновидность названа матрицами Прокла ввиду выраженного диагональю стремления к некоторой золотой середине.

Рекурсия с матрицей Прокла дает, в свою очередь, Пропусы [2] — четырехблочные массивы с попарно совпадающими блоками. К сходному (после перестановки центральных блоков) результату приводит вставка матрицы Мерсенна в симметричный массив Вильямсона (рис. 9).

При таком осреднении количество элементов, отличных от 1 и –1, убывает, при этом элементы диагональных блоков равны 1 и $-b$ при $-b$, стремящемся к –1.

Связь критских матриц

Связь критских матриц между собой отражает структурная формула, *меандр* (рис. 10), обладающий, как и таблица Менделеева (таблица химических элементов кратна 4), предсказывающей силой.



■ *Рис. 10.* Меандр критских матриц

В самом деле, меандр подводит к выводу, например, о том, что матрицы Зейделя, как и матрицы Мерсенна, разлагаются на квазиортогональные матрицы, предикторы **e**, сходные с матрицами Эйлера **E**. Предсказанные матрицы, обозначенные малым символом **e**, действительно обнаружены и названы *теневыми*: необычность предикторов матриц Зейделя **S** состоит в том, что они существуют на порядках матриц Адамара, но связаны, опосредованно, с симметричными матрицами Белевича **C** (тени матриц Белевича). Это форма существования симметричных бициклов порядков $4t$, тогда как матрицы Адамара конструкции Пэли асимметричны.

Тема симметрии давно привлекает к себе внимание многих ученых. Компьютерное исследование матриц Адамара начинается в 1962 году находкой матрицы порядка 92, недостижимой методами Скарпи и Пэли. Кососимметричная матрица Адамара того же размера — рекорд 1971 года [13]. Кососимметричные (с точностью до элементов диагонали) матрицы Адамара конструкции Вильямсона — Себерри рассматриваются в диссертации профессора Дж. Себерри [12]. В 1992 г. компьютерные методы вставки (plug into) матриц друг в друга систематизируются в обзоре Дж. Себерри и Миеко Ямады [14], это одна из самых широко цитируемых работ этих авторов.

Многие асимметричные матрицы Адамара (skew-type) составных порядков найдены компьютерным поиском профессором Др. Джоковичем [16, 17]. Индексы симметрии и кососимметрии матриц Адамара исследованы в работе [18]; первый порядок-исключение 35 симметричной матрицы Вильямсона обсуждается в работах [19, 20]. Благодаря симметрии массива Балонина — Себерри [21] (особенности Пропус-конструкции [2, 22] критских матриц см. на рис. 8) удалось доказать существование симметричных матриц Адамара порядков 116 и 172 [23].

Меандры (специфические формулы связей критских матриц) обеспечивают целостное восприятие такого обширного материала, как ортогональные базисы четных и нечетных порядков. На каждом порядке сосуществуют как простые, так и сложные матрицы, порождения идущих снизу цепочек. Этим обстоятельством можно пользоваться для кодирования, поскольку глубина вложения цепочки (порядковый номер матрицы в цепочке) — скрываемый перестановками строк и столбцов код.

Теория критских матриц иллюстрирует основные теоремы и факты теории чисел [1], заостряет внимание на сопоставлении четным и нечетным числам матричных портретов малоуровневых экстремальных (локально оптимальных по детерминанту) матриц [2]. На критских матрицах базируются ныне фильтры Мерсенна и Ферма [24], применяемые в процедурах помехозащитного кодирования и сжатия видеоизображений. Квазиортогональные матрицы с иррациональными элементами, связанные с золотым сечением, дают матричные модели квазикристаллов [25, 26].

Заключение

Работа Пэли завершила начатое Адамаром построение теории квазиортогональных матриц с элементами 1 и –1 предложением методов генерации матриц (алгоритмами, работающими в арифметике конечных полей) и поправок Кронекера произведения для расширения полученных алгоритмами результатов.

Настоящая статья дополняет наш обзор критских матриц с базовыми элементами 1 и $-b$, $b \le 1$ порядков, определенных на всей числовой оси, рассмотрением наших поправок к произведению Кронекера, позволяющих вычислить как матрицы Адамара, так и связанные с ними критские матрицы Мерсенна, Ферма, Эйлера и прочие.

Блочные критские матрицы четных порядков обобщают матрицы Белевича в том, что отличные от 1 и –1 элементы расположены только на (блочной) диагонали. Мы отмечаем их постольку, поскольку Пропусы существуют на четных порядках 668, 716, 892, на которых матрицы Адамара пока не найдены.

Например, Пропус 668 строится на основе матрицы $\mathbf{M}_{167}$. Число 167 — простое, циклическая матрица имеет конструкцию, как и матрица $\mathbf{M}_{28}$.

Литература

1. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2016. № 1(80). С. 2–15. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
2. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2–15.
3. **Balonin N. A., Seberry Jennifer.** Remarks on Extremal and Maximum Determinant Matrices with Real

Entries ≤ 1 // Информационно-управляющие системы. 2014. № 5(71). С. 2–4.
4. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants// Bulletin des Sciences Mathématiques. 1893. Vol. 17. P. 240–246.
5. **Scarpis U.** Sui Determinanti di Valore Massimo // Rendiconti Della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 1898. Vol. 31. P. 1441–1446.
6. **Paley R. E. A. C.** On Orthogonal Matrices // Journal of Mathematics and Physics. 1933. Vol. 12. P. 311–320.
7. **Belevitch V.** Theorem of 2n-terminal Networks with Application to Conference Telephony // Electr. Commun. 1950. Vol. 26. P. 231–244.
8. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Востриков А. А.** О двух предикторах вычисляемых цепочек квазиортогональных матриц // Автоматика и вычислительная техника. 2015. № 3. С. 42–48. doi:10.3103/S0146411615030025
9. **Balonin N. A., Seberry Jennifer.** A Review and New Symmetric Conference Matrices // Информационно-управляющие системы. 2014. № 4(71). P. 2–7.
10. **Balonin N. A., Sergeev M. B.** Regular Hadamard Matrix of Order 196 and Similar Matrices // Информационно-управляющие системы. 2015. № 1(73). P. 2–3. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.1.2
11. **Balonin N. A., Seberry Jennifer, Sergeev M. B.** Three Level Cretan Matrices of Order 37//Информационно-управляющие системы. 2015. № 2(74). P. 2–3. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.2.2
12. **Awyzio Gene and Seberry Jennifer.** On Good Matrices and Skew Hadamard Matrices. http://www.uow.edu.au/~jennie/WEB/WEB15/2015_11_Good_matrices.pdf (дата обращения: 15 ноября 2014).
13. **Baumert Leonard, Golomb S. W. and Hall Marshall.** Discovery of an Hadamard Matrix of Order 92 // Bull. Amer. Math. Soc. California Institute of Technology. 1962. Vol. 68. P. 237–238.
14. **Seberry Wallis Jennifer.** A skew-Hadamard Matrix of Order 92 // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1971. Vol. 5. P. 203–204.
15. **Seberry Jennifer and Yamada** Mieko. Hadamard Matrices, Sequences, and Block Designs // Contemporary Design Theory. A Collection of Surveys. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. — John Wiley and Sons, 1992. P. 431–560.
16. **Djokovic D. Z.** Ten New Orders for Hadamard Matrices of Skew Type // Univ. Beograd Pull. Electrotehn. Fak. Ser. Math. 1992. N 3. P. 47–59.
17. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices // Информационно-управляющие системы. 2015. № 5(78). С. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
18. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Symmetry of Two Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs // Информационно-управляющие системы. 2015. № 3(76). С. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.16
19. **Djokovic D. Z.** Williamson Matrices of Order $4n$ for $n = 33;35;39$ // Discrete Math. 1993. Vol. 115. P. 267–271.
20. **Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B.** Williamson Matrices up to Order 59 // Designs, Codes and Cryptography. 2008. Vol. 46. Iss. 3. P. 343–352.
21. **Balonin N. A., Seberry Jennifer.** The Propus Construction for Symmetric Hadamard Matrices. 2015. http://arxiv.org/abs/1512.01732 (дата обращения: 5 сентября 2015).
22. **Balonin N. A., Seberry Jennifer.** Two-level Cretan Matrices Constructed Using SBIBD // Special Matrices. 2015. Vol. 3.1. P. 186–192.
23. **Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist // Special Matrices. 2015. Vol. 3.1. P. 227–234.
24. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О расширении ортогонального базиса в задачах сжатия видеоизображений // Вестник компьютерных и информационных технологий (ВКИТ). 2014. № 2. С. 11–15. doi: 10.14489/vkit.2014.02.pp.011-015
25. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** М-матрицы и кристаллические структуры // Вестник Магнитогорского государственного технического университета им. Г. И. Носова. 2013. № 3. С. 58–62.
26. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрица золотого сечения G10 // Информационно-управляющие системы. 2013. № 6. С. 2–5.

UDC 519.614
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2

Mersenne and Hadamard Matrices, Products

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
Sergeev M. B.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, mbse@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The goal is to demonstrate that a Kronecker product with subsequent correction of its elements can be generalized for quasiorthogonal local maximum determinant matrices with a low number of levels in order to obtain high-dimension matrices of the same quality (with a low number of levels), in particular, Hadamard and Mersenne matrices. **Results:** It has been shown that the complexity of the correction formulas for the Kronecker product of quasiorthogonal matrices with a low number of levels (Cretan matrices) depends on the type of symmetry of the factor matrices, their order in the product, and distance between the sizes of the matrix factors.

We have described the types of possible matrix factors by the types of their symmetry, dependence of the symmetry on the matrix size and the position of a matrix in the chain of Cretan matrices with increasing orders. Tables of symmetrized matrices are provided. We have generalized Scarpis product for Hadamard matrix by its core or a rounded Mersenne matrix, and demonstrated that the permutation of symmetrized factors allows you to multiply Hadamard matrix of both prime and composite orders. The Kronecker product technique is expanded into matrix factors whose sizes have a difference (distance) not exceeding 4. The product of Mersenne matrices of order 4t+1 and Seidel matrices of order 4t−1 generates regular Hadamard matrices with sums of columns equal to each other. The diversity of sizes of the matrix factors leads to block structures in which elements different from 1 or −1 are placed only inside the diagonal blocks.
Practical relevance: Algorithms of calculating Cretan matrices were used in the construction of research software. Matrices which are suboptimal by determinant are the basis of Mersenne and Fermat filters used in image compression and masking.
Keywords — Kronecker Product, Orthogonal Matrix, Cretan Matrix, Hadamard Matrix, Conference Matrix, Mersenne Matrix, Fermat Matrix, Generalized Scarpis Method, Circulant Matrix.

References

1. Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 1(80), pp. 2–15 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
2. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local Maximum Determinant Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1(68), pp. 2–15 (In Russian).
3. Balonin N. A., Seberry Jennifer. Remarks on Extremal and Maximum Determinant Matrices with Real Entries ≤ 1. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 5(71), pp. 2–4.
4. Hadamard J. Resolution D'une Question Relative aux Determinants. *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
5. Scarpis U. Sui Determinanti di Valore Massimo. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, vol. 31, pp. 1441–1446 (In Italian).
6. Paley R. E. A. C. On Orthogonal Matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
7. Belevitch V. Theorem of 2n-terminal Networks with Application to Conference Telephony. *Electr. Commun.*, 1950, vol. 26, pp. 231–244.
8. Balonin N. A., Sergeev M. B., Vostrikov A. A. On Two Predictors of Calculable Chains of Quasi-Orthogonal Matrices. *Avtomatika i vychislitel'naia tekhnika*, 2015, vol. 49, no. 3, pp. 153–158 (In Russian). doi:10.3103/S0146411615030025
9. Balonin N. A., Seberry Jennifer. A Review and New Symmetric Conference Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 4(71), pp. 2–7.
10. Balonin N. A., Sergeev M. B. Regular Hadamard Matrix of Order 196 and Similar Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 1(73), pp. 2–3. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.1.2
11. Balonin N. A., Seberry Jennifer, Sergeev M. B. Three Level Cretan Matrices of Order 37. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 2(74), pp. 2–3. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.2.2
12. Awyzio Gene and Seberry Jennifer. On Good Matrices and Skew Hadamard Matrices. Available at: http://www.uow.edu.au/~jennie/WEB/WEB15/2015_11_Good_matrices.pdf (accessed 5 November 2014).
13. Baumert Leonard, Golomb S. W. and Hall Marshall. Discovery of an Hadamard Matrix of Order 92. *Bull. Amer. Math. Soc.*, California Institute of Technology, 1962, no. 68, pp. 237–238.
14. Seberry Wallis Jennifer. A Skew-Hadamard Matrix of Order 92. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1971, no. 5, pp. 203–204.
15. Seberry Jennifer and Yamada Mieko. Hadamard Matrices, Sequences, and Block Designs. In: *Contemporary Design Theory*: A *Collection of Surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds., John Wiley and Sons, 1992, pp. 431–560.
16. Djokovic D. Z. Ten New Orders for Hadamard Matrices of Skew Type. *Univ. Beograd Publ., Electrotehn. Fak. Ser. Math.*, 1992, no. 3, pp. 47–59.
17. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Negaperiodic Golay Pairs and Hadamard Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 5(78), pp. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
18. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of Two Circulant Hadamard Matrices and Periodic Golay Pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3(76), pp. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.16
19. Djokovic D. Z. Williamson Matrices of Order 4*n* for *n* = 33;35;39. *Discrete Math.*, 1993, no. 115, pp. 267–271.
20. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson Matrices up to Order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, vol. 46, iss. 3, pp. 343–352.
21. Balonin N. A., Seberry Jennifer. The Propus Construction for Symmetric Hadamard Matrices. 2015. Available at: http://arxiv.org/abs/1512.01732 (accessed 15 September 2015).
22. Balonin N. A., Seberry Jennifer. Two-level Cretan Matrices Constructed Using SBIBD. *Special Matrice*, 2015, vol. 3.1, pp. 186–192.
23. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard Matrices of Order 116 and 172 Exist. *Special Matrices*, 2015, vol. 3.1, pp. 227–234.
24. Balonin N. A., Sergeev M. B. Expansion of the Orthogonal Basis in Video Compression. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii* [Herald of Computer and Information Technologies], 2014, no. 2, pp. 11–15 (In Russian). doi:10.14489/vkit.2014.02.pp.011-015
25. Balonin N. A., Sergeev M. B. M-matrices and Crystal Structures. *Vestnik Magnitogorskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. G. I. Nosova*, 2013, no. 3, pp. 58–62 (In Russian).
26. Balonin N. A., Sergeev M. B. Matrix of Golden Ratio G10. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 6, pp. 2–5 (In Russian).