на Ф. Франклином в 1928 г. Исторически она является первым примером ортонормированного (в $L_2[0,1]$) базиса в линейном пространстве непрерывных функций.

7.10. Системы Радемахера и Уолша

Система Хаара, обладая рядом замечательных свойств, обладает и существенным с точки зрения некоторых приложений недостатком — ее функции, будучи ограниченными в отдельности, в совокупности неограниченно растут (не являются равномерно ограниченными). Кроме того, для многих приложений (вычислительной математики, теории кодирования, цифровой обработки сигналов и т. д.) важным требованием является простота (т.е. конечность множества значений) функций *ортонормированных систем*. В этом параграфе познакомимся с двумя системами функций в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$, свободными от указанного недостатка и обладающими указанным достоинством.

Первая из этих систем — ***система Радемахера*** — строится на основе системы Хаара $\chi_m^{(k)}(x)$ путем сложения и нормирования функций Хаара с одинаковыми нижними индексами:

$$\begin{cases} r_0(x) = \chi_0^{(0)}(x) = 1; \\ r_1(x) = \chi_0^{(1)}(x); \\ r_{m+1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2^m}} \displaystyle\sum_{k=1}^{2^m} \chi_m^{(k)}(x), \quad m \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{7.28}$$

где $x \in (0,1)$. Поскольку для функций гильбертова пространства $L_2[0,1]$ не существенно, как они определены в любом конечном числе точек, то для определенности положим

$$r_m(0) = r_m(1) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Нетрудно видеть, что определенные таким образом функции системы Радемахера $r_m(x)$ с номерами $m \geqslant 1$ имеют вид

$$r_m(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(\dfrac{2k-2}{2^m}, \dfrac{2k-1}{2^m}\right), \quad k = \overline{1, 2^{m-1}}; \\ -1, & x \in \left(\dfrac{2k-1}{2^m}, \dfrac{2k}{2^m}\right), \quad k = \overline{1, 2^{m-1}}; \\ 0, & x = \dfrac{k}{2^m}, \quad k = \overline{0, 2^m}, \end{cases}$$

т.е. на интервалах вида $\bigl((k-1)/2^m, k/2^m\bigr)$ попеременно принимают значения $+1$ и -1, а во всех точках разрыва равны нулю. Все функции Радемахера, в том числе и функцию $r_0(x)$, можно задать одной компактной формулой:

$$r_m(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2^m \pi x), \quad x \in [0, 1], \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

где

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u > 0; \\ 0, & u = 0; \\ -1, & u < 0. \end{cases}$$

Система функций $\{r_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ была построена Г Радемахером в 1922 г.

Выясним свойства системы Радемахера. Во-первых, в силу равенств (7.28), выражающих функции Радемахера через функции Хаара, из *ортогональности системы* Хаара следует ортогональность системы Радемахера, так как *скалярное произведение* функций Радемахера с различными номерами есть конечная сумма скалярных произведений функций Хаара с различными номерами. Во-вторых, поскольку $r_m^2(x) = 1$ *почти всюду* на $[0, 1]$ для всех номеров m, то функции Радемахера в $L_2[0,1]$ имеют *нормы*, равные 1. Таким образом, система Радемахера является ортонормированной.

Однако система Радемахера не является *полной системой* и, следовательно, не является *базисом* в $L_2[0,1]$. В самом деле, нетрудно видеть, что для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ верно равенство

$$(r_m, r_1 r_2)) = \int\limits_0^1 r_m(x) r_1(x) r_2(x)\, dx = 0,$$

т.е. функция $g(x) = r_1(x) r_2(x)$, являясь ненулевым элементом гильбертова пространства $L_2[0,1]$ (она не является функцией, равной нулю почти всюду на $[0, 1]$, — см. график этой функции на рис. 7.5), ортогональна всем функциям системы Радемахера. Поэтому система Радемахера не полна. Согласно теореме 6.14, система Радемахера не является базисом в $L_2[0,1]$. Следовательно, *ряд Фурье* функции $f(x)$ из $L_2[0,1]$ по системе Радемахера даже в случае его *сходимости* в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ (т.е. *в среднем квадратичном*) не всегда представляет исходную функцию $f(x)$. Тем не менее система Радемахера обладает рядом интересных свойств.

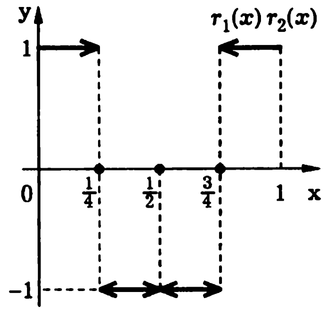

Рис. 7.5

Теорема 7.20. Если *числовой ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m^2$ сходится, то ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m r_m(x)$ по системе Радемахера сходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

◀ Положим

$$c_m^{(k)} = \frac{c_m}{\sqrt{2^m}}, \quad k = \overline{1, 2^m}.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{k=1}^{2^m} \left(c_m^{(k)}\right)^2$ сходится, поскольку

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} \left(c_m^{(k)}\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} \left(\frac{c_m}{\sqrt{2^m}}\right)^2 = \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < +\infty.$$

Так как система Хаара $\{\chi_m^{(k)}(x)\}$ ортонормирована, то в силу *теоремы Рисса — Фишера* ряд Фурье $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{2^m} c_m^{(k)}\chi_m^{(k)}(x)$ по системе Хаара сходится в *гильбертовом пространстве* $L_2[0,1]$ к некоторой функции $f(x)\in L_2[0,1]$. Согласно теореме 7.18, этот ряд сходится к $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. Но, учитывая представление (7.28) функций системы Радемахера через функции системы Хаара, для всех точек $x\in[0, 1]$, в которых сходится ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{2^m} c_m^{(k)}\chi_m^{(k)}(x)$, т.е. почти всюду на $[0, 1]$, имеем

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^m} c_m^{(k)}\chi_m^{(k)}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c_m}{\sqrt{2^m}}\sum_{k=1}^{2^m}\chi_m^{(k)}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}c_m r_m(x).$$

Следовательно, ряд по системе Радемахера $\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m r_m(x)$ также сходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$. ▶

Сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m^2$ из квадратов коэффициентов является критерием сходимости ряда по системе Радемахера почти всюду на $[0, 1]$, т.е. при нарушении этого критерия ряд по системе Радемахера уже не будет почти всюду сходящимся. Более того, в отличие от рядов по системе Хаара, для рядов по системе Радемахера верно следующее утверждение.

Теорема 7.21*. Если числовой ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m^2$ расходится, то *ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m r_m(x)$ по системе Радемахера *расходится* почти всюду на отрезке $[0, 1]$. #

С помощью функций системы Радемахера можно построить еще одну ортонормированную систему в $L_2[0,1]$, о которой шла речь в начале параграфа.

---

*Доказательство см., например: *Алексич Г.*

Положим

$$w_0(x) = 1, \quad x \in [0, 1]. \tag{7.29}$$

Заметим, что всякое натуральное число $n \geqslant 1$ может быть единственным способом разложено по возрастающим степеням числа 2:

$$n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_p}, \tag{7.30}$$

где $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_p$. Например, $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2^0+2^1$, $4 = 2^2$, $5 = 2^0+2^2$ и т.д.

Для номера $n \geqslant 1$ с разложением (7.30) положим

$$w_n(x) = r_{\nu_1+1}(x)\, r_{\nu_2+1}(x) \ldots r_{\nu_p+1}(x), \quad x \in [0, 1], \tag{7.31}$$

где $r_{\nu_i+1}(x)$, $i = \overline{1, p}$, — функции системы Радемахера. Систему $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ функций, определенных формулами (7.29) и (7.31), называют ***системой Уолша***. Она впервые была введена Дж. Уолшем в 1923 г.

Докажем, что функции системы Уолша в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ попарно ортогональны. Для различных номеров n и l, имеющих разложения $n = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \quad + 2^{\nu_p}$, где $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \quad < \nu_p$, и $l = 2^{\eta_1} + 2^{\eta_2} + \ldots + 2^{\eta_q}$, где $0 \leqslant \eta_1 < < \eta_2 < \ldots < \eta_q$, находим

$$(w_n, w_l) = \int\limits_0^1 w_n(x)\, w_l(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(r_{\nu_1+1}(x) \ldots r_{\nu_p+1}(x)\Big)\Big(r_{\eta_1+1}(x) \ldots r_{\eta_q+1}(x)\Big) dx.$$

Преобразуем подынтегральное выражение. Сначала из произведения

$$\Big(r_{\nu_1+1}(x) \ldots r_{\nu_p+1}(x)\Big)\Big(r_{\eta_1+1}(x) \ldots r_{\eta_q+1}(x)\Big)$$

вычеркнем (удалим) все пары функций с одинаковыми номерами. Такое вычеркивание не изменит интеграла, поскольку квадрат любой функции Радемахера равен единице почти всюду на $[0, 1]$. Оставшиеся функции в произведении переставим таким образом, чтобы их номера возрастали. В итоге получим

$$\Bigl(r_{\nu_1+1}(x)\ldots r_{\nu_p+1}(x)\Bigr)\Bigl(r_{\eta_1+1}(x)\ldots r_{\eta_q+1}(x)\Bigr) = \\ = r_{j_1}(x)\,r_{j_2}(x)\,\ldots\,r_{j_k}(x),$$

где $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, и равенство выполняется почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

В соответствии с определением функций системы Радемахера произведение функций Радемахера с меньшими номерами $r_{j_1}(x)r_{j_2}(x)\cdots r_{j_{k-1}}(x)$ является *кусочно постоянной функцией* со значениями $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$, каждый ее интервал постоянства $E_i = (a_i,\, b_i)$ разбивается функцией $r_{j_k}(x)$ с бóльшим номером на четное число интервалов равной длины, на которых функция $r_{j_k}(x)$ попеременно принимает значения $+1$ и -1. Поэтому для любого интервала $E_i = (a_i,\, b_i)$ постоянства функции $r_{j_1}(x)\,r_{j_2}(x)\ldots r_{j_{k-1}}(x)$ имеем

$$\int\limits_{E_i}\Bigl(r_{j_1}(x)\,r_{j_2}(x)\ldots r_{j_{k-1}}(x)\Bigr)r_{j_k}(x)\,dx = \lambda\int\limits_{E_i} r_{j_k}(x)\,dx = 0.$$

Просуммировав эти равенства по всем интервалам постоянства $E_i = (a_i,\, b_i)$, получим

$$\int\limits_0^1 r_{j_1}(x)\,r_{j_2}(x)\ldots r_{j_k}(x)\,dx = \\ = \sum_{(i)}\int\limits_{E_i}\Bigl(r_{j_1}(x)\,r_{j_2}(x)\ldots r_{j_{k-1}}(x)\Bigr)r_{j_k}(x)\,dx = 0.$$

Следовательно, для всех $n \neq l$

$$(w_n,\, w_l) = \int\limits_0^1 w_n(x)w_l(x)\,dx = \int\limits_0^1 r_{j_1}(x)\,r_{j_2}(x)\ldots r_{j_k}(x)\,dx = 0.$$

Поскольку квадрат любой функции Радемахера равен единице почти всюду на $[0, 1]$, то

$$w_n^2(x) = r^2_{\nu_1+1}(x)\, r^2_{\nu_2+1}(x) \qquad r^2_{\nu_p+1}(x) = 1$$

почти всюду на $[0, 1]$. Значит, для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\|w_n\| = \sqrt{\int_0^1 w_n^2(x)\, dx} = 1.$$

Итак, система Уолша $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной системой функций в $L_2[0,1]$. Как нетрудно заметить, система Радемахера является подмножеством и подпоследовательностью системы Уолша, а именно

$$r_{m+1}(x) = w_{2^m}(x), \quad x \in [0, 1], \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Однако, в отличие от системы Радемахера, система Уолша полна.

Теорема 7.22. Система функций Уолша является счетным ортонормированным базисом в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$.

◀ Доказательство базисности системы Уолша аналогично доказательству базисности системы Хаара (см. теорему 7.16).

Во-первых, из определения функций Уолша следует, что все функции Уолша $w_n(x)$ с номерами $0 \leqslant n < 2^m$ постоянны в каждом из интервалов

$$\left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right), \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^m.$$

Поэтому все эти функции $w_n(x)$ с номерами $0 \leqslant n < 2^m$ принадлежат *подпространству* $D_m \subset L_2[0,1]$ (см. доказательство теоремы 7.16) функций, постоянных в каждом из интервалов

$((k-1)/2^m, k/2^m)$, $1 \leqslant k \leqslant 2^m$. Подпространство D_m имеет размерность 2^m, и функции $w_n(x)$, $0 \leqslant n < 2^m$, как раз составляют ортонормированный базис в подпространстве D_m.

Во-вторых, учитывая, что множество всех непрерывных функций является *всюду плотным* в $L_2[0,1]$, для любого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности всякой функции $\varphi(x) \in L_2[0,1]$ можно найти непрерывную функцию $g(x)$, а в ε-окрестности функции $g(x)$ — функцию $f(x)$ из D_m (см. доказательство теоремы 7.16), являющуюся многочленом по системе Уолша, т.е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^m-1} a_k w_k(x).$$

Функция $f(x)$ принадлежит линейной оболочке системы Уолша. Это доказывает *замкнутость системы* Уолша в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$. И, наконец, поскольку система Уолша ортонормирована, то, согласно теореме 6.12, она является счетным базисом в $L_2[0,1]$. ▶

Итак, система Уолша, как и система Хаара, является счетным базисом в гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$. Однако свойства сходимости рядов Фурье по системе Уолша не так хороши, как соответствующие свойства рядов по системе Хаара.

Теорема 7.23*. Система Уолша не является базисом в банаховом пространстве $L_1[0,1]$. #

Кроме того, существуют, например, непрерывные функции, ряд Фурье которых по системе Уолша расходится в некоторой точке отрезка [0, 1], чего не может быть в случае рядов Фурье по системе Хаара (см. теорему 7.19). Существуют также *суммируемые* на отрезке [0, 1] *функции*, ряд Фурье которых по системе Уолша всюду на отрезке [0, 1] расходится (сравните с теоремой 7.18). Однако для рядов Фурье по системе Уолша справедлива следующая теорема.

---

*Доказательства этой и следующей теорем см.: *Кашин Б.С., Саакян А.А.*

Теорема 7.24. Для любой функции $f(x) \in L_2[0,1]$ ее ряд Фурье по системе Уолша сходится к самой функции $f(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. #

Как видим, свойства системы Уолша во многом аналогичны свойствам *тригонометрической системы.*

Вопросы и задачи

7.1. Докажите, что банахово пространство $L_1[0,1]$ не является евклидовым, т.е. в $L_1[0,1]$ не существует скалярного умножения, индуцирующего норму этого банахова пространства.

7.2. Докажите, что для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из гильбертова пространства $L_2[a,b]$ выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b \bigl(f(x)+g(x)\bigr)^2\,dx \leqslant \left(\sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)\,dx}\right)^2$$

7.3. Докажите, что для любой функции $f(x) \in L_2[a,b]$ выполняется неравенство

$$\|f\|_{L_1} \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_{L_2},$$

где $\|\cdot\|_{L_1}$ и $\|\cdot\|_{L_2}$ — нормы в банаховых пространствах $L_1[a,b]$ и $L_2[a,b]$.

7.4. Докажите, что если последовательность $\{f_k(x)\}$ функций банахова пространства $L_1[a,b]$ сходится в среднем к суммируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, то она сходится к $f(x)$ и по мере Лебега, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0: \quad \lim_{k\to\infty} m\{x \in [a, b]\colon\ |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

где m — мера Лебега.