УДК 004.056.53

О ВЫБОРЕ МАТРИЦ ДЛЯ ПРОЦЕДУР МАСКИРОВАНИЯ И ДЕМАСКИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Востриков А.А., Мишура О.В., Сергеев А.М., Чернышев С.А.

ФГАОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения», Санкт-Петербург, e-mail: mbse@mail.ru

Матричное маскирование изображений и видеопоследовательностей может осуществляться с использованием различных типов квадратных матриц или матричных базисов. Стандарты на размеры матриц, использование технологий выделения на изображениях «окна повышенного качества» требуют большого разнообразия матриц для обеспечения наилучшего соответствия порядка матрицы размеру изображения, подлежащего маскированию. Преимущественным является использование базисов, порядки матриц в которых наиболее полно соответствуют множеству натуральных чисел. Целью работы является обоснование выбора квази-ортогональных базисов для процедур матричного маскирования. Использован метод сопоставительного анализа вычислительной сложности получения матриц и обратных им, кратности порядков матриц базисов типовым размерам изображений. В работе сформулированы основные определения, показаны алгоритмы цепочного вычисления квази-ортогональных матриц Адамара – Мерсенна и Адамара – Эйлера, оценен размер базиса указанных матриц и связанных с ними матриц золотого сечения по сравнению с базисом матриц Адамара. Результаты сравнения показывают однозначное преимущество базиса квази-ортогональных матриц, подкрепленное дополнительными качествами, обретаемыми из их экстремальных свойств.

Ключевые слова: маскирование изображений, демаскирование, маскирование видеопоследовательностей, ортогональные матрицы, квази-ортогональные матрицы, жакетные матрицы, базисы квази-ортогональных матриц, М-матрицы, матрицы Адамара, матрицы Адамара – Мерсенна, числа Мерсенна, матрицы Адамара – Эйлера, матрицы золотого сечения

THE CHOICE OF MATRICES FOR IMAGES MASKING AND DEMASKING PROCEDURES

Vostrikov A.A., Mishura O.V., Sergeev A.M., Chernyshev S.A.

Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint-Petersburg, e-mail: mbse@mail.ru

Matrix masking of images and video sequences can be performed using different kinds of square matrices and matrix bases. Demands for matrices dimensions, implementation of technologies for allocation of «higher quality boxes» require a wide variety of matrices in order to ensure the best match of the order of the matrix image size to be masked. It is advantageous to use bases, orders of the matrices of which most fully correspond to the set of natural numbers. The aim of this work is justification of choice of quasi-orthogonal bases for images masking procedures. The method of comparative analysis of the computational complexity of matrices and inverse matrices obtaining has been used. The multiplicity of the order of the basis matrices to typical image sizes is also taken into account. Results: Basic definitions are formulated, algorithms for chain calculating of quasi-orthogonal Hadamar-Mersenne and Hadamar-Euler matrices are presented, variety of the basis of the mentioned matrices and related golden-ratio matrices in comparison with the basis of Hadamard matrices is evaluated. Comparison results show a clear advantage of the basis of quasi-orthogonal matrices, supported with additional qualities, gained from their extreme properties.

Keywords: image masking, image demasking, video sequences masking, orthogonal matrices, quasi-orthogonal matrices, jacket matrices, quasi-orthogonal matrices bases, M-matrices, Hadamard matrices, Hadamard-Mersenne matrices, Mersenne prime, Hadamard-Euler matrices, golden ratio matrices

В современном мире защита информации от несанкционированного доступа и подмены имеет огромное значение, особенно защита изображений и видеопотоков в сетях общего пользования [10, 13, 16]. Большинство традиционных систем, успешно применяемых на практике, не могут впрямую использоваться для защиты цифрового видео в системах реального времени, поскольку базируются на алгоритмах шифрации и требуют значительных вычислительных затрат. В то же время известны [15] матричные методы кодирования видеоинформации, которые могут быть использованы в том числе для защиты видеокадров от несанкционированного просмотра.

Для указанной цели в работах [13, 14] были предложены относительно простые и реализуемые в реальном времени процедуры маскирования изображений, основанные на матричных преобразованиях кадров видеопотока.

Теория маскирования и исследование свойств маскированных изображений в последнее время значительно интенсифицировались [12, 14], однако однозначного ответа на вопрос о выборе вида матриц (матричных базисов) на сегодня не существует.

В настоящей работе анализируются преимущества и недостатки матричных базисов, которые можно использовать для задач маскирования.

Основные определения

Определение 1. Маскирование – вычислительная процедура преобразования цифрового изображения, разрушающая его до вида, воспринимаемого визуально как шум.

Задачей маскирования является сохранение изображения в недоступном третьей стороне виде в течение времени актуальности этого изображения.

В настоящей работе ограничимся системами передачи видео по сетям общего пользования, время актуальности для которых определяется в минутах или десятках минут. Это как коммерческие сетевые системы трансляции, так и специальные системы видеонаблюдения за распределенными объектами, видеомониторинга территорий и массовых мероприятий и др.

Определение 2. Маскирование видеопоследовательности – вычислительная процедура преобразования цифровых изображений кадров, разрушающая их до вида, не позволяющего визуально различать объекты съемки и целостно воспринимать по последовательности кадров сценарий событий.

Определение 3. Матричное маскирование – вычислительная процедура преобразования цифровых изображений с использованием матричных операций, разрушающая его до вида, воспринимаемого визуально как шум.

Определение 4. Матричное демаскирование – вычислительная процедура обратного преобразования с использованием матричных операций, восстанавливающая исходное цифровое изображение из маскированного.

Задача организации процесса матричного маскирования/демаскирования изображений (отдельных кадров видеопотока) состоит в простоте и симметричности выполняемых преобразований изображений в системе передачи по открытым сетям.

Очевидно, что при симметричности системы прямое преобразование матрицей требует в обратном преобразовании матрицы, обратной к маскирующей.

В общем случае как исходная, так и обратная матрицы порядка n могут иметь до n^2 уровней – по числу элементов матриц.

Рассмотрим три способа получения обратной матрицы по исходной.

В общем случае для матрицы $\mathbf{A}_n$ порядка n существует обратная матрица $\mathbf{A}_n^{-1}$ такая, что

$$\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{A}_n = \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \ldots, 1)$. Однако процедуры вычисления обратной матрицы предполагают выполнение операций умножения и деления общим количеством не менее чем $O(n^3)$. Это первый способ получения обратной матрицы, не позволяющий вычислить $\mathbf{A}_n^{-1}$ точно. Выполнимо лишь $\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{A}_n = \mathbf{I}^*$, где $\mathbf{I} - \mathbf{I}^* \neq 0$. Кроме того, плохая определенность исходной матрицы ставит под сомнение саму возможность вычисления обратной [11].

Определение 5. Жакетной матрицей называется матрица $\mathbf{L}_n$ с элементами l_{ij}, для которой $n\mathbf{L}_n^{-1} = \left(l_{ij}^{-1}\right)$ [20–21].

Очевидно, для таких матриц вычисление обратной матрицы заменяется инверсией элементов исходной – это второй способ, менее трудоемкий. Однако даже на порядках матриц Адамара не для всех значений n жакетные матрицы существуют, что является сдерживающим фактором для широкого их применения в маскировании.

В предположении, что современные видеокадры имеют различные размеры в цифровом выражении – от стандартов прошлого века PAL, SECAM, NTSC до современных HD, Full HD, 4K и т.д., а также реализуются режимы передачи видеоизображений с выделением произвольного окна качества (Quality Box) – в арсенале маскиратора/демаскиратора должны быть матрицы различных порядков. Идеальным является вариант, когда порядки матриц из множества в базисе соответствуют множеству всех натуральных чисел.

Для ортогональных и квази-ортогональных матриц, к которым относятся матрицы Адамара, матрицы Адамара – Мерсенна [7], Адамара – Эйлера [6], Мерсенна – Уолша [1] и базисов на их основе $\mathbf{A}_n^{-1} = \mathbf{A}_n^{\mathrm{T}}$. Это третий и наиболее простой способ получения обратных матриц, не требующий вычислительных затрат.

Определение 6. Уровнями матрицы [3, 5] называются численные значения, которым равны ее элементы.

Кроме матриц Адамара – квадратных двухуровневых матриц $\mathbf{H}_n$ порядка n, состоящих из чисел $\{1, -1\}$, столбцы которых ортогональны

$$\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_n = n\mathbf{I},$$

где $\mathbf{I} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \ldots, 1)$, существуют матрицы квази-ортогональные – локально-оптимальные по адамаровой норме [18].

Из рассмотренного выше следуют основные вопросы – насколько просто получение исходных ортогональных и квази-ортогональных матриц, имеющих обратные в виде транспонированных? Сколько матриц в базисе двухуровневых матриц?

Определение 7. Матрица Адамара – Мерсенна [7] – двухуровневая матрица $\mathbf{M}_n$

порядка n, состоящая из элементов $\{a = 1, -b\}$, столбцы которой x ортогональны

$$\mathbf{M}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_n = \mu\mathbf{I},$$

где $\mu = \frac{(n+1)+(n-1)b^2}{2}$. Значение уровня $-b$ определяется при $n > 3$ как $b = \frac{q-\sqrt{4q}}{q-4}$, $q = n + 1$ – порядок матрицы Адамара.

Матрицы Адамара – Мерсенна дополняют множество матриц Адамара на классе ортогональных матриц и существуют на нечетных порядках $n = 2^k - 1$ (k – целое), равных числам последовательности Мерсенна. Однако, согласно гипотезе [23], множества матриц Адамара и Адамара – Мерсенна являются равновеликими и матрицы Адамара – Мерсенна существуют на всех порядках $4k - 1$.

Число квази-ортогональных матриц Адамара – Мерсенна не уступает числу целочисленных матриц Адамара, но значения коэффициентов двухуровневых матриц Адамара – Мерсенна – вещественные числа, что позволяет лучше защитить видеоинформацию.

Цепочки квази-ортогональных матриц

С матрицами Адамара – Мерсенна тесно связано множество матриц Адамара – Эйлера [6], существующих на порядках $4k - 2$.

Последовательность матриц Адамара – Мерсенна хотя и начинается с тривиальной матрицы первого порядка, однако базовой можно считать матрицу третьего порядка [7] вида

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} a & -b & a \\ -b & a & a \\ a & a & -b \end{pmatrix}.$$

Для итерационного получения ортогональных двухуровневых матриц Адамара – Мерсенна последующих порядков из предыдущих на основе формулы Сильвестра строятся сначала четырехуровневые матрицы Адамара – Эйлера

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2} \\ \mathbf{M}_{n/2} & -\mathbf{M}_{n/2} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{M}_{n/2}$ – двухуровневая матрица Адамара – Мерсенна вдвое меньшего нечетного порядка [6]. При этом преобразовании число уровней удваивается ввиду инверсии двухуровневой матрицы Адамара – Мерсенна.

Следующий шаг заключается в пересчете матрицы Адамара – Эйлера в матрицу Адамара – Мерсенна дополнением ее строкой и столбцом (каймой) в виде [6]:

$$\mathbf{M}_{n+1} = \begin{pmatrix} -\lambda & e^{\mathrm{T}} \\ e & \mathbf{E}_{2n}^{*} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda = -a$ – собственное число, а $\boldsymbol{e}$ – собственный вектор «сопряженной» матрицы $\mathbf{E}_{2n}^{*} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2} \\ \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2}^{*} \end{pmatrix}$. $\mathbf{M}_{n/2}^{*}$ получатся из матрицы Мерсенна соответствующего порядка взаимной заменой элементов $a = 1$ и $-b$, причем первую половину отличных от a коэффициентов собственного вектора составляют элементы $-b$. При $n > 3$ уровень $b = \frac{q-\sqrt{4q}}{q-4}$, $q = n + 1$ (порядок матрицы Адамара).

Из приведенных выше формул видно, что такая последовательность действий позволяет снова вернуться к двухуровневому варианту матрицы Адамара – Мерсенна, порядок которой соответствует следующему числу в последовательности Мерсенна.

Матрицы Эйлера модульно двухуровневые [6], дополняющие базис квази-ортогональных матриц, они также могут использоваться в процедурах маскирования.

Приведенная последовательность действий описывает процедуру вычисления цепочек матриц как механизм существенного расширения квази-ортогонального базиса для задач маскирования.

Обращает на себя внимание тот факт, что на дополнительных порядках $n = 10\cdot 2^k$ (n = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 и т.д.) существуют квази-ортогональные G-матрицы [20, 21], связанные с матрицами Адамара – Эйлера и занимающие особое место в алгоритмах обработки изображений.

Особенности алгоритмов маскирования на цепочках матриц

Типичный тракт обработки изображения в процедуре матричного маскирования рассмотрен в работах [17, 24]. Особенность использования в ней рассмотренных квази-ортогональных базисов заключается в том, что, во-первых, порядки входящих в них матриц закрывают значительную часть множества натуральных чисел, включая кратные традиционным размерам изображений.

Во-вторых, кроме дискретности уровней элементов матрицы, как у матрицы Адамара, не менее важную роль при преобразовании играет оригинальность базиса, обеспечивающая скрытность получаемых маскированных данных. Это делает двухуровневые матрицы с иррациональными значениями уровней удобными при выполнении процедуры маскирования изображений на цифровых устройствах.

В-третьих, в отличие от традиционных базисов в задаче маскирования большое значение имеют дополнительные качества, обретаемые из экстремальных свойств базисных наборов. Матрицы Адамара и близкие к ним матрицы Мерсенна оптимальны в смысле нейтрализации последствий воздействия точечных помех при передаче по коммуникационным каналам.

В-четвертых, не менее важны рекурсивные процедуры увеличения порядка матрицы. Дополнительный аргумент рациональности использования базисов, построенных на последовательностях чисел, состоит в том, что алгоритм построения их фрактален и матрицы при определенном устройстве алгоритма обладают повышенной чувствительностью к изменению разрядной сетки процессора и начальных данных.

Современное состояние процессоров цифровой обработки сигналов, характеризующееся увеличением производительности и структурной ориентацией на выполнение операции свертки в формате вещественных чисел, позволяет эффективно использовать описанные и более сложные базисы – многоуровневые *M*-матрицы [5].

Заключение

В процессе поиска для алгоритмов маскирования изображений оригинальных ортогональных матриц нечетных порядков, близких к матрицам Адамара по свойствам, выделен предпочтительный класс двухуровневых матриц Адамара – Мерсенна. Порядки этих матриц равны числам Мерсенна вида $2^k - 1$, однако их состав значительно расширяется гипотезой Балонина до $4k - 1$.

Инструмент для поиска новых матриц Адамара – Мерсенна с отличными от рассмотренных матриц структурами существует в виде программного комплекса [9, 19]. Комплекс может быть использован при усложнении задачи маскирования видеоизображений, заключающемся в том, что матрица ортогонального преобразования не вычисляется заранее, а является результатом работы алгоритма. По открытому каналу в качестве ключа передаются только настройки для ее вычисления.

Практическое применение рассмотренных в работе базисов матриц целесообразно в задачах повышения степени помехоустойчивости и защищенности при передаче информации по открытым каналам коммуникаций.

Список литературы

1. Балонин Н.А., Балонин Ю.Н., Востриков А.А., Сергеев М.Б. Вычисление матриц Мерсенна-Уолша // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2014. – № 11. – С. 51–55.

2. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Нормы обобщенных матриц Адамара // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2014. – № 2. – С. 5–11.

3. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. – 2014. – № 1. – С. 2–15.

4. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. Матрица золотого сечения G_{10} // Информационно-управляющие системы. – 2013. – № 6 (67). – С. 2–5.

5. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. М-матрицы // Информационно-управляющие системы. – 2011. – № 1. – С. 14–21.

6. Балонин Н.А., Сергеев М.Б. О двух способах построения матриц Адамара-Эйлера // Информационно-управляющие системы. – 2013. – № 1. – С. 7–10.

7. Балонин Н.А., Сергеев М.Б., Мироновский Л.А. Вычисление матриц Адамара-Мерсенна // Информационно-управляющие системы. – 2012. – № 5. – С. 92–94.

8. Балонин Ю.Н., Востриков А.А., Сергеев М.Б. О прикладных аспектах применения М-матриц // Информационно-управляющие системы. – 2012. – № 1. v С. 92–93.

9. Балонин Ю.Н., Сергеев М.Б. Алгоритм и программа поиска и исследования М-матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 3. – С. 82–86.

10. Борискевич А.А., Киндеева О.Л. Защита контента изображений на основе частотного полу-хрупкого маркирования // Специальная техника. – 2012. v № 1. – С. 7–16.

11. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

12. Востриков А.А., Балонин Ю.Н. Матрицы Адамара-Мерсенна как базис ортогональных преобразований при маскировании видеоизображений // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2014. – Т. 57. – № 1. – С. 15–19.

13. Ерош И.Л., Сергеев А.М., Филатов Г.П. О защите цифровых изображений при передаче по каналам связи // Информационно-управляющие системы. – 2007. – № 5. – С. 20–22.

14. Востриков А.А., Чернышев С.А. Об оценке устойчивости к искажениям изображений, маскированных М-матрицами // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2013. – № 5. – С. 99–103.

15. Мироновский Л.А., Слаев В.А. Стрип-метод преобразования изображений и сигналов. – СПб.: Политехника, 2006. – 163 с.

16. Остроушко А.В., Букалерова Л.А. Информация, содержащая фотографии (изображения) человека, нуждается в уголовно-правовой защите // Правовые вопросы связи. – 2007. – № 1. – С. 39–45.

17. Balonin N., Sergeev M. Construction of Transformation Basis for Video Image Masking Procedures // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – Vol. 262: Smart Digital Futures 2014. – P. 462–467. DOI 10.3233/978-1-61499-405-3-462.

18. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Two-Circulant Golden Ratio Matrices // Информационно-управляющие системы. – 2014. – № 5. – С. 5–11.

19. Balonin Yu., Sergeev M., Vostrikov A. Software for Finding M-matrices // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – Vol. 262: Smart Digital Futures 2014. – P. 475–480. DOI 10.3233/978-1-61499-405-3-475.

20. K. Finlayson, M. Ho Lee, J. Seberry, M. Yamada. Jacket Matrices constructed from Hadamard Matrices and Generalized

Hadamdrd Matrices // Australasian Journal of Combinatorics. – 2006. – № 35. – P. 83–87.

21. M. H. Lee. A new reverse Jacket transform and its fast algorithm // IEEE Transactions on circuits and systems II. – 2000. – № 47. – P. 39–47.

22. M. H. Lee. Jacket Matrices: Constructions and Its Applications for Fast Cooperative Wireless Signal Processing. LAP LAMBERT Publishing, Germany, 2012.

23. Sergeev A. Generalized Mersenne Matrices and Balonin's Conjecture // *Automatic Control and Computer Sciences*. – 2014. – Vol. 48, № 4. – P. 214–220. DOI: 10.3103/S0146411614040063.

24. Vostrikov A., Chernyshev S. Implementation of Novel Quasi-Orthogonal Matrices for Simultaneous Images Compression and Protection // Frontiers in Artificial Intelligence and Applications. – Vol. 262: Smart Digital Futures 2014. – P. 451–461. DOI 10.3233/978-1-61499-405-3-451.

References

1. Balonin N.A., Balonin Ju.N., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Vychislenie matric Mersenna-Uolsha. *Vestnik kompjuternyh i informacionnyh tehnologij*, 2014, no. 11, pp. 51–55.

2. Balonin N.A., Sergeev M.B. Normy obobshhennyh matric Adamara. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Serija 10: Prikladnaja matematika. Informatika. Processy upravlenija*, 2014, no. 2, pp. 5–11.

3. Balonin N.A., Sergeev M.B. Matricy lokalnogo maksimuma determinant. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2014, no. 1, pp. 2–15.

4. Balonin N.A., Sergeev M.B. Matrica zolotogo sechenija G10. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 6(67), pp. 2–5.

5. Balonin N.A., Sergeev M.B. M-matricy. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2011, no. 1, pp. 14–21.

6. Balonin N.A., Sergeev M.B. O dvuh sposobah postroenija matric Adamara-Jejlera. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 1, pp. 7–10.

7. Balonin N.A., Sergeev M.B., Mironovskij L.A. Vychislenie matric Adamara-Mersenna. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2012, no. 5, pp. 92–94.

8. Balonin Ju.N., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. O prikladnyh aspektah primenenija M-matric. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy,* 2012, no. 1, pp. 92–93.

9. Balonin Ju.N., Sergeev M.B. Algoritm i programma poiska i issledovanija M-matric. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2013, no. 3, pp. 82–86.

10. Boriskevich A.A., Kindeeva O.L. Zashhita kontenta izobrazhenij na osnove chastotnogo polu-hrupkogo markirovanija. *Specialnaja tehnika*, 2012, no. 1, pp. 7–16.

11. Voevodin V.V., Kuznecov Ju.A. Matricy i vychislenija. Moscow, Nauka, 1984. 320 p.

12. Vostrikov A.A., Balonin Ju.N. Matricy Adamara-Mersenna kak bazis ortogonalnyh preobrazovanij pri maskirovanii videoizobrazhenij. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie*, 2014, Vol. 57, no. 1, pp. 15–19.

13. Erosh I.L., Sergeev A.M., Filatov G.P. O zashhite cifrovyh izobrazhenij pri peredache po kanalam svjazi. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2007, no. 5, pp. 20–22.

14. Vostrikov A.A., Chernyshev S.A. Ob ocenke ustojchivosti k iskazhenijam izobrazhenij, maskirovannyh M-matricami. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2013, no. 5, pp. 99–103.

15. Mironovskij L.A., Slaev V.A. Strip-metod preobrazovanija izobrazhenij i signalov. Saint-Petersburg, Politehnika, 2006. 163 p.

16. Ostroushko A.V., Bukalerova L.A. Informacija, soderzhashhaja fotografii (izobrazhenija) cheloveka, nuzhdaetsja v ugolovno-pravovoj zashhite. *Pravovye voprosy svjazi*, 2007, no.1, pp. 39–45.

17. Balonin N., Sergeev M. Construction of Transformation Basis for Video Image Masking Procedures. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, Volume 262: Smart Digital Futures 2014*, pp. 462-467. DOI 10.3233/978-1-61499-405-3-462.

18. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. Two-Circulant Golden Ratio Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy,* 2014, no. 5, pp. 5–11.

19. Balonin Yu., Sergeev M., Vostrikov A. Software for Finding M-matrices. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, Volume 262: Smart Digital Futures 2014*, pp. 475–480. DOI 10.3233/978-1-61499-405-3-475.

20. Finlayson K., Lee M.H., Seberry J., Yamada M. Jacket Matrices constructed from Hadamard Matrices and Generalized Hadamdrd Matrices. *Australasian Journal of Combinatorics*, 35 (2006). pp. 83–87.

21. Lee M.H. A new reverse Jacket transform and its fast algorithm. *IEEE Transactions on circuits and systems II*, 47(2000). pp. 39–47.

22. Lee M.H.. Jacket Matrices: Constructions and Its Applications for Fast Cooperative Wireless Signal Processing. LAP LAMBERT Publishing, Germany, 2012.

23. Sergeev A. Generalized Mersenne Matrices and Balonins Conjecture. *Automatic Control and Computer Sciences,* 2014, Vol. 48, no. 4, pp. 214–220. DOI: 10.3103/0146411614040063.

24. Vostrikov A., Chernyshev S. Implementation of Novel Quasi-Orthogonal Matrices for Simultaneous Images Compression and Protection. *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications, Volume 262: Smart Digital Futures 2014*, pp. 451–461. DOI 10.3233/978-1-61499-405-3-451.

Рецензенты:

Шалыто А.А., д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Технологии программирования», ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики», г. Санкт-Петербург;

Юлдашев З.М., д.т.н., профессор, зав. кафедрой биотехнических систем, «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург.