МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 30, № 4 (1981)

РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ ТИПА ВИЛЬЯМСОНА

С. С. Агаян, А. Г. Саруханян

Матрицей Адамара H порядка m называется квадратная матрица, элементы которой суть $+1$ и -1 и для которой справедливо равенство

$$HH^T = H^T H = mI_m,$$

где H^T — транспонированная матрица H, а I_m — здесь и ниже — единичная матрица порядка m.

Отметим, что задача построения матриц Адамара всех порядков m, $m \equiv 0 \pmod 4$ остается открытой. Существует ряд методов по построению матриц Адамара конкретных порядков. Один из этих методов, получивший дальнейшее развитие, принадлежит Вильямсону.

ТЕОРЕМА (Вильямсон [1]). *Пусть A, B, C, D — циклические, попарно коммутативные симметрические $(-1, +1)$ матрицы порядка m, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4mI_m$. Тогда массив Вильямсона*

$$\begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ -C & D & A & -B \\ -D & -C & B & A \end{Vmatrix}$$

является матрицей Адамара порядка $4m$.

Последние достижения по построению матриц Адамара связаны с построением ортогональных схем [2], являющихся естественным обобщением массивов Вильямсона, Бомер — Холла [1], Геталс — Зейделя [3, 4], М. Плоткина и построением матриц типа Вильямсона, т. е. 4 или 8 $(-1, +1)$ матриц $\{A_i\}_{i=1}^l$, $l = 4, 8$, порядка m, удовлетворяющих условиям:

а) $MN^T = NM^T$, $M, N \in \{A_i\}_{i=1}^l$,

б) $\sum_{i=1}^l A_i A_i^T = lmI_m$.

а) Известны 4 матрицы типа Вильямсона следующих порядков:

1. Все матрицы порядка n, $n < 100$, за исключением 35, 39, 47, 53, 65, 67, 71, 73, 83, 89, 94 [1].

2. $(1/2)\ (p + 1)$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ — степень простого числа [5].

3. 9^l, d — натуральное число [6].

4. $(1/2)\ p\ (p + 1)$, $p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ — степень простого числа [7].

5. $s\ (4s + 3)$, $s\ (4s - 1)$, $s \in \{1, 3, 5, \ldots, 23, 25\}$ [8].

6. 93 [9].

7. $2n$, где n — порядок существующих матриц типа Вильямсона [9].

8. $(p + 1)\ (p + 2)$, $p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ — простое число, а $p + 3$ — порядок некоторой симметрической матрицы Адамара [9].

9. $2s\ (4s + 1)$, $4s + 1$ — простое число, $s \in \{1, 3, 5, \ldots, 23, 25\}$ [9].

10. $2 \cdot 39$, $2 \cdot 203$, $2 \cdot 303$, $2 \cdot 333$, $2 \cdot 669$, $2 \cdot 695$, $2 \cdot 1603$ [10].

11. $2 \cdot 35$, $2 \cdot 65$, $2 \cdot 77$ [4].

12. $(1/2)\ p^r\ (p + 1)$, $p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ — степень простого числа, $r \geqslant 0$ [11].

б) Известны 8 матриц типа Вильямсона следующих порядков: $(1/2)\ (p + 1)\ q$, где $p \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$, $q \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ — простые числа [8].

Множество матриц, приведенных в 1—12, обозначим через L.

Все основные теоремы, из которых получаются матрицы Адамара, а именно: теоремы Вильямсона [1], Бомер — Холла, Валисса [9], Янга [1], можно получить как частные случаи сформулированной ниже теоремы.

Определение 1. Множество $(-1, +1)$ матриц $\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ назовем семейством Вильямсона типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, B_m)$, если выполняются следующие условия:

а) Существует такая $(0, 1)$ матрица B_m порядка m, что для любого i, j, i, $j = 1, 2, \ldots, l$, выполняется равенство

$$A_i B_m A_j^T = A_j B_m A_i^T,$$

$$\sum_{i=1}^{l} s_i A_i A_i^T = \left(m \sum_{i=1}^{l} s_i\right) I_m.$$

Если $s_1 = s_2 = \ldots = s_l = s$, то семейство Вильямсона типа $(s, s, \ldots, s, B_m)$ обозначим через (s, l, B_m).

Замечание 1. Если $l = 4$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$, а $B_m = I_m$, то семейство Вильямсона типа $(1, 1, 1, 1, I_m) = (1, 4, I_m)$ совпадает с матрицами типа Вильямсона.

Замечание 2. Если $l = 8$, $s_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, а $B_m = I_m$, то семейство Вильямсона типа $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, I_m) = (1,8, I_m)$ совпадает с восемью матрицами типа Вильямсона.

Замечание 3. Если $l = 4$, $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1$, а $B_m = R$,

$$R = (r_{i,j})_{i,j=1}^{m}, \quad r_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{ если } i + j = m + 1, \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

и $A_i A_j = A_j A_i$, то семейство Вильямсона типа $(1, 1, 1, 1, R) = (1, 4, R)$ сопадает с обобщенными матрицами типа Вильямсона [12].

Определение 2 [2]. Квадратная матрица A порядка n, элементы которой имеют вид $0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_l$, называется ортогональной схемой типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l)$, если выполняется условие

$$AA^T = \sum_{i=1}^{l} (s_i x_i^2) I_n,$$

где s_i — целые положительные числа, а x_i — действительные матрицы одинакового порядка (в частности, действительные числа).

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ — семейство Вильямсона типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, I_m)$. И пусть существует ортогональная схема типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l)$ порядка n, состоящая из элементов $\pm x_i$, $x_i \neq 0$. Тогда существует матрица Адамара порядка mn.*

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из представления ортогональных схем [2] и из понятия семейств Вильямсона. Другими словами теорема утверждает, что из существования ортогональных схем и семейств Вильямсона вытекает существование матриц Адамара.

Естественно рассмотреть и следующие обратные задачи: Возможно ли из матриц Адамара порядка $4n$ построить: а) семейство Вильямсона типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, I_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, если да, то как из полученных семейств построить новые семейства Вильямсона;

б) ортогональную схему типа $(s, s, \ldots, s)$ порядка $l \leqslant 4n$. Задача б) при $l = 4n$ и при произвольной матрице Адамара совпадает с гипотезой М. Плотника [13].

Настоящая работа посвящена исследованию этих вопросов. В частности получены рекуррентные формулы построения семейств и p-семейств Вильямсона, доказано существование семейств Вильямсона типа $(1, 4, I_k)$, $k = m\prod_i 2^{\alpha} n_i^{\alpha_i}$, где m — порядок некоторой матрицы типа Вильямсона, $n_i \in L$, α_i — целые неотрицательные числа, доказано также, что из существования p-семейства Вильямсона типа $(1, 4, 4, I_k)$ и семейства Вильямсона типа $(1,4, I_n)$ следует существование семейства Вильямсона типа $(1, 4, I_{nk})$.

Определение 3. Множество матриц $\{A_i\}_{i=1}^{l}$, элементы которых имеют вид $\pm x_1, \pm x_2, \ldots, x_n$, назовем p-семейством Вильямсона типа $(s_1, s_2, \ldots, s_l, n, B_m)$, если выполняются следующие условия:

1) существует такая (0, 1) матрица B_m порядка m, что для любого $i, j = 1, 2, \ldots, l$ выполняется равенство

$$A_i B_m A^T = A_j B_m A_i^T;$$

2) если n_{ijk} количество появления элемента x_i или $-x_i$ в j—й строке (столбце) матрицы A_k, то

$\sum_{k=1}^{l} n_{ijk} = m$ для всех $i, j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m;$

3) $\sum_{i=1}^{l} s_i A_i A_i^T = m(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) I_m$.

Если $s_1 = s_2 = \ldots = s_l = s$, то p-семейство Вильямсона типа $(s, s, \ldots, s, n, B_m)$ обозначим через (s, l, n, B_m).

Определение 4. Квадратную матрицу $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ порядка m, каждый элемент которой принимает одно из $2l$ значений $\pm x_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, назовем матрицей типа A или A-матрицей, если для разных значений параметров $x_1, x_2, \ldots, x_l$ выполняется равенство

$$H(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_l^{(1)})\, H^T(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_l^{(2)}) + \\ + H(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_l^{(2)})\, H^T(x_1^{(1)} x_2^{(1)}, \ldots, x_l^{(1)}) = \\ = (2m/l)\,(x_1^{(1)} x_1^{(2)} + x_2^{(1)} x_2^{(2)} + \ldots + x_l^{(1)} x_l^{(2)})\, I_m.$$

Замечание 4. Если $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ — A-матрица порядка m, то ее можно представить в виде

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_l) = x_1 K_1 + x_2 K_2 + \ldots + x_l K_l,$$

где K_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, — $(0, -1, +1)$ — матрицы, удовлетворяющие условиям

$K_i * K_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$ $*$ — адамарово произведение,

$$K_i K_j^T + K_j K_i^T = 0, \; i \neq j, \; i, j = 1, 2, \ldots, l, \qquad (1)$$

$\sum_{i=1}^{l} K_i$ является $(-1, +1)$ матрицей порядка m, $K_i K_i^T = (m/l)\, I_m$, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Замечание 5. Если $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ — A-матрица порядка m, то $H(1, 1, \ldots, 1)$ — матрица Адамара порядка m.

ЛЕММА 1. *Пусть $H(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ — A-матрица порядка m, $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ — семейство Вильямсона типа $(1, l, D_n)$, тогда множество $\{A_i \times H\}_{i=1}^{l}$ является p-семейством Вильямсона типа $(1, l, l, B_{m,n})$, где $\times$ — кронекерово произведение.*

Доказательство. Докажем, что матрицы $C_i = A_i \times H$, $i = 1, 2, \ldots, l$, образуют p-семейство Вильямсона типа $(1, l, l, B_{mn})$. С этой целью проверим условия определения 3. Обозначим $B_{mn} = D_n \times I_m$,

$$C_i B_{mn} C_j^T = (A_i \times H)(D_n \times I_m)(A_j^T \times H^T) = \\ = (A_i D_n \times H)(A_j^T \times H^T) = A_i D_n A_j^T \times H H^T,$$

$$C_j B_{mn} C_i^T = (A_j \times H)(D_n \times I_m)(A_i^T \times H^T) = \\ = (A_j D_n \times H)(A_i^T \times H^T) = A_j D_n A_i^T \times H H^T.$$

Так как множество $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ является семейством Вильямсона типа $(1, l, D_n)$, то из полученных выражений следует, что

$$C_i B_{mn} C_j^T = C_j B_{mn} C_i^T.$$

Очевидно, также, что если n_{ijk} — число появлений элемента x_i или $-x_i$ в j-й строке (столбце) матрицы C_k, то $\sum_{k=1}^{l} n_{ijk} = mn$ для всех $i = 1, 2, \ldots, l$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, mn$. Теперь проверим третье условие:

$$\sum_{i=1}^{l} C_i C_i^T = \sum_{i=1}^{l} (A_i \times H)(A_i^T \times H^T) =$$
$$= \sum_{i=1}^{l} A_i A_i^T \times HH^T = (m/l)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2) I_m \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{l} A_i A_i^T = (m/l)(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2) I_m \times lnI_n =$$
$$= mn(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_l^2) I_{mn}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть H — матрица Адамара порядка m, $\{A_i\}_{i=1}^{l}$ — р-семейство Вильямсона типа $(1, l, k, D_n)$. Тогда множество $\{A_i \times H\}_{i=1}^{l}$ является р-семейством Вильямсона типа $(1, l, k, D_n \times I_m)$.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Если существует матрица Адамара порядка n, то существует р-семейство Вильямсона типа $(1, k, k, I_n)$, $k = 2, 4$.*

Доказательство. Пусть H — матрица Адамара порядка n. Представим матрицу H в виде

$$H = \begin{Vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{Vmatrix}.$$

Так как H — матрица Адамара, то матрицы P_i, $i = 1, 2, 3, 4$, удовлетворяют условиям

$$P_1P_1^T + P_2P_2^T = P_3P_3^T + P_4P_4^T = nI_{n/2},$$
$$P_1P_3^T + P_2P_4^T = 0.$$

Рассмотрим матрицы

$$X = \begin{Vmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_4 \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} 0 & P_2 \\ P_3 & 0 \end{Vmatrix},$$

удовлетворяющие условиям

1) $X * Y = 0$.

2) $X \pm Y$ является $(-1, +1)$ матрицей порядка n,

3) $XY^T = YX^T$, (2)

4) $XX^T + YY^T = nI_n$.

Далее определим множество матриц $\{A_i\}_{i=1}^4$ следующим образом:

$$A_1 = aX - bY,\ A_2 = bX + aY,$$
$$A_3 = cX - dY,\ A_4 = dX + cY.$$

Легко показать, что множество $\{A_i\}_{i=1}^4$ является p-семейством Вильямсона типа $(1, 4, 4, I_n)$, а матрицы A_1, A_2 образуют p-семейство Вильямсона типа $(1, 2, 2, I_n)$.

Следствие 1. *Существует p-семейство Вильямсона типа* $(1, 4, 4, I_{4mn})$, *где* $m \in L$, $n \in \{2k + 1, 2^a 10^b \cdot 26^c + 1\}$, $0 \leqslant k \leqslant 30$, a, b, c, — *целые неотрицательные числа.*

Определение 5. Матрицы Q_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, элементы которых принимают значения 0, —1 и +1, назовем матрицами типа S или S-матрицами, если выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&1)\ Q_i * Q_j = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, l,\\
&2)\ \sum\nolimits_{i=1}^{l} Q_i \text{ является } (-1, +1) \text{ матрицей порядка } n,\\
&3)\ Q_i^T = Q_i,\ Q_iQ_j = Q_jQ_i,\ i, j = 1, 2, \ldots, l,\\
&4)\ Q_iQ_i^T = (n/l)I_n.
\end{aligned} \tag{3}$$

Легко проверить, что матрицы

$$P_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad P_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$
$$P_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad P_4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

являются S-матрицами порядка 4.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$ — *S-матрицы порядка n. И пусть* $\{X_0, Y_0, Z_0, W_0\}$ *и* $\{A, B, C, D\}$ — *семейства Вильямсона соответственно типов* $(1, 4, I_m)$ *и* $(1, 4, I_k)$, *тогда матрицы*

$$X_i = X_{i-1} \times A \times Q_1 + Y_{i-1} \times B \times Q_2 + Z_{i-1} \times C \times Q_3 + W_{i-1} \times D \times Q_4,$$

$$Y_i = -Y_{i-1} \times A \times Q_1 + X_{i-1} \times B \times Q_2 - W_{i-1} \times C \times Q_3 + Z_{i-1} \times D \times Q_4,$$

$$Z_i = -Z_{i-1} \times A \times Q_1 + W_{i-1} \times B \times Q_2 + \\ + X_{i-1} \times C \times Q_3 - Y_{i-1} \times D \times Q_4,$$

$$W_i = -W_{i-1} \times A \times Q_1 - Z_{i-1} \times B \times Q_2 + \\ + Y_{i-1} \times C \times Q_3 + X_{i-1} \times D \times Q_4$$

образуют семейство Вильямсона типа $(1,\ 4,\ I_{m(kn)^i})$, $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Проверим условие а) определения 1. Обозначим $B_r = I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n$. Пусть при $i = 1$ теорема верна, докажем ее при $i > 1$. Вычислим

$$\begin{aligned} X_i\,(I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n)\,Y_i^T &= (X_{i-1} \times A \times Q_1 + \\ &+ Y_{i-1} \times B \times Q_2 + Z_{i-1} \times C \times Q_3 + W_{i-1} \times D \times Q_4)\cdot \\ &\cdot (I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n)(-Y_{i-1}^T \times A^T \times Q_1 + \\ &+ X_{i-1}^T \times B^T \times Q_2 - W_{i-1}^T \times C^T \times Q_3 + Z_{i-1}^T \times D^T \times Q_4) = \\ &= (X_{i-1} \times A \times Q_1 + Y_{i-1} \times B \times Q_2 + Z_{i-1} \times C \times Q_3 + \\ &+ W_{i-1} \times D \times Q_4)\cdot(-Y_{i-1}^T \times A^T \times Q_1 + \\ &+ X_{i-1}^T \times B^T \times Q_2 - W_{i-1}^T \times C^T \times Q_3 + Z_{i-1}^T \times D^T \times Q_4) = \\ &= -X_{i-1}Y_{i-1}^T \times AA^T \times Q_1^2 + X_{i-1}X_{i-1}^T \times AB^T \times Q_1Q_2 - \\ &- X_{i-1}W_{i-1}^T \times AC^T \times Q_1Q_3 + X_{i-1}Z_{i-1}^T \times AD^T \times Q_1Q_4 - \\ &- Y_{i-1}Y_{i-1}^T \times BA^T \times Q_2Q_1 + Y_{i-1}X_{i-1}^T \times BB^T \times Q_2^2 - \\ &- Y_{i-1}W_{i-1}^T \times BC^T \times Q_2Q_3 + Y_{i-1}Z_{i-1}^T \times BD^T \times Q_2Q_4 - \\ &- Z_{i-1}Y_{i-1}^T \times CA^T \times Q_3Q_1 + Z_{i-1}X_{i-1}^T \times CB^T \times Q_3Q_2 - \\ &- Z_{i-1}W_{i-1}^T \times CC^T \times Q_3^2 + Z_{i-1}Z_{i-1}^T \times CD^T \times Q_3Q_4 - \\ &- W_{i-1}Y_{i-1}^T \times DA^T \times Q_4Q_1 + W_{i-1}X_{i-1}^T \times DB^T \times Q_4Q_2 - \\ &- W_{i-1}W_{i-1}^T \times DC^T \times Q_4Q_3 + W_{i-1}Z_{i-1}^T \times DD^T \times Q_4^2\,. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\begin{aligned} Y_i\,(I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n)\,X_i^T &= (-Y_{i-1} \times A \times Q_1 + \\ &+ X_{i-1} \times B \times Q_2 - W_{i-1} \times C \times Q_3 + Z_{i-1} \times D \times Q_4)\cdot \\ &\cdot (I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n)(X_{i-1}^T \times A^T \times Q_1 + \\ &+ Y_{i-1}^T \times B^T \times Q_2 + Z_{i-1}^T \times C^T \times Q_3 + W_{i-0}^T \times D^T \times Q_4) = \\ &= (-Y_{i-1} \times A \times Q_1 + X_{i-1} \times B \times Q_2 - W_{i-1} \times C \times Q_3 + \end{aligned}$$

$$+ Z_{i-1} \times D \times Q_4)(X_{i-1}^T \times A^T \times Q_1 + Y_{i-1}^T \times B^T \times Q_2 +$$
$$+ Z_{i-1}^T \times C^T \times Q_3 + W_{i-1}^T \times D^T \times Q_4) =$$
$$= - Y_{i-1}X_{i-1}^T \times AA^T \times Q_1^2 - Y_{i-1}Y_{i-1}^T \times AB^T \times Q_1Q_2 -$$
$$- Y_{i-1}Z_{i-1}^T \times AC^T \times Q_1Q_3 - Y_{i-1}W_{i-1}^T \times AD^T \times Q_1Q_4 +$$
$$+ X_{i-1}X_{i-1}^T \times BA^T \times Q_2Q_1 + X_{i-1}Y_{i-1}^T \times BB^T \times Q_2^2 +$$
$$+ X_{i-1}Z_{i-1}^T \times BC^T \times Q_2Q_3 + X_{i-1}W_{i-1}^T \times BD^T \times Q_2Q_4 -$$
$$- W_{i-1}X_{i-1}^T \times CA^T + Q_3Q_1 - W_{i-1}Y_{i-1}^T \times CB^T \times Q_3Q_2 -$$
$$- W_{i-1}Z_{i-1}^T \times CC^T \times Q_3^2 - W_{i-1}W_{i-1}^T \times CD^T \times Q_3Q_4 +$$
$$+ Z_{i-1}X_{i-1}^T \times DA^T \times Q_4Q_1 + Z_{i-1}Y_{i-1}^T \times DB^T \times Q_4Q_2 +$$
$$+ Z_{i-1}Z_{i-1}^T \times DC^T \times Q_4Q_3 + Z_{i-1}W_{i-1}^T \times DD^T \times Q_4^2 .$$

Сравнивая полученные выражения, замечаем, что

$$X_i (I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n) Y_i^T = Y_i (I_{m(kn)^{i-1}} \times I_k \times I_n) X_i^T .$$

Таким же способом можно проверить все условия $PB_rQ^T = QB_rP^T$, где $P, Q \in \{X_i, Y_i, Z_i, W_i\}$.

Проверим условие б) определения 1:

$$X_iX_i^T + Y_iY_i^T + Z_iZ_i^T + W_iW_i^T = (X_{i-1}X_{i-1}^T +$$
$$+ Y_{i-1}Y_{i-1}^T + Z_{i-1}Z_{i-1}^T + W_{i-1}W_{i-1}^T) \times AA^T \times Q_1^2 +$$
$$+ (X_{i-1}X_{i-1}^T + Y_{i-1}Y_{i-1}^T + Z_{i-1}Z_{i-1}^T + W_{i-1}W_{i-1}^T) \times BB^T \times Q_2^2 +$$
$$+ (X_{i-1}X_{i-1}^T + Y_{i-1}Y_{i-1}^T + Z_{i-1}Z_{i-1}^T + W_{i-1}W_{i-1}^T) \times CC^T \times Q_3^2 +$$
$$+ (X_{i-1}X_{i-1}^T + Y_{i-1}Y_{i-1}^T + Z_{i-1}Z_{i-1}^T + W_{i-1}W_{i-1}^T) \times DD^T \times Q_4^2.$$

Так как $Q_i = (n/4)\, I_n$, то

$$X_iX_i^T + Y_iY_i^T + Z_iZ_i^T + W_iW_i^T =$$
$$= (X_{i-1}X_{i-1}^T + Y_{i-1}Y_{i-1}^T + Z_{i-1}Z_{i-1}^T + W_{i-1}W_{i-1}^T) \times$$
$$\times (AA^T + BB^T + CC^T + DD^T) \times (n/4) I_n =$$
$$= 4m(kn)^{i-1} I_{m(kn)^{i-1}} \times 4kI_k \times (n/4) I_n = 4m(kn)^i I_{m(kn)^i} .$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Если существуют семейства Вильямсона типа* $(1,\ 4,\ I_m)$ *и p-семейства Вильямсона типа* $(1,\ 4,\ 4,\ I_m)$, *то существует p-семейство Вильямсона типа* $(1,\ 4,\ 4,\ I_{(2n)^i m})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$

Доказательство. Пусть $\{A, B, C, D\}$ — семейство Вильямсона типа $(1, 4, I_n)$ и $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ — p-семейство Вильямсона типа $(1, 4, 4, I_m)$. Рассмотрим матрицы

$$X = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} A+B & C+D \\ C+D & -A-B \end{Vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} A-B & C-D \\ -C+D & A-B \end{Vmatrix},$$

$$A_i = A_{i-1} \times X + B_{i-1} \times Y, \quad B_i = B_{i-1} \times X - A_{i-1} \times Y,$$
$$C_i = C_{i-1} \times X + D_{i-1} \times Y, \quad D_i = D_{i-1} \times X - C_{i-1} \times Y.$$

Можно показать, что X и Y удовлетворяют условиям (2).

Докажем, что A_i, B_i, C_i, D_i образуют p-семейство Вильямсона типа $(1,4, 4, I_{(2n)^i m})$, $i = 1, 2, \ldots$

Сначала докажем теорему при $i = 1$. Вычислим

$$\begin{aligned} A_1A_1^T &= A_0A_1^T \times \\ &\times XX^T + B_0B_0^T \times YY^T + A_0B_0^T \times XY^T + B_0A_0^T \times YX^T, \\ B_1B_1^T &= B_0B_0^T \times XX^T + A_0A_0^T \times YY^T - B_0A_0^T \times XY^T - \\ &\qquad - A_0B_0^T \times YX^T, \\ C_1C_1^T &= C_0C_0^T \times XX^T \times D_0D_0^T \times YY^T + C_0D_0^T \times XY^T + \\ &\qquad + D_0C_0^T \times YX^T, \\ D_1D_1^T &= D_0D_0^T \times XX^T + C_0C_0^T \times YY^T - D_0C_0^T \times XY^T - \\ &\qquad - C_0D_0^T \times YX^T. \end{aligned} \tag{4}$$

Суммируя выражения (4), получим

$$A_1A_1^T + B_1B_1^T + C_1C_1^T + D_1D_1^T =$$
$$= (A_0A_0^T + B_0B_0^T + C_0C_0^T + D_0D_0^T) \times (XX^T + YY^T).$$

Так как $\{A_0, B_0, C_0, D_0\}$ — p-семейство Вильямсона типа $(1, 4, 4, I_m)$, а матрицы X и Y удовлетворяют условиям (2), то

$$A_1A_1^T + B_1B_1^T + C_1C_1^T + D_1D_1^T = 2mn\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,I_{mn}.$$

Теперь убедимся, что $A_1B_1^T = B_1A_1^T$,

$$\begin{aligned} A_1B_1^T &= A_0B_0^T \times XX^T - A_0A_0^T \times XY^T + B_0B_0^T \times YX^T - \\ &\qquad - B_0A_0^T \times YY^T, \\ B_1A_1^T &= B_0A_0^T \times XX^T + B_0B_0^T \times XY^T - A_0A_0^T \times YX^T - \\ &\qquad - A_0B_0^T \times YY^T. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно получить, что $PQ^T = QP^T$, где $P, Q \in \{A_1, B_1, C_1, D_1\}$. Таким образом, для $i = 1$ теорема доказана.

Допустим, что теорема справедлива при $i = k$, т. е. множество $\{A_k, B_k, C_k, D_k\}$ является p-семейством Вильямсона типа $(1, 4, 4, I_{(2n)^k m})$. Докажем теорему при $i = k + 1$. Справедливо равенство

$$A_{k+1}A_{k+1}^T + B_{k+1}B_{k+1}^T + C_{k+1}C_{k+1}^T + D_{k+1}D_{k+1}^T = (A_kA_k^T + B_kB_k^T + C_kC_k^T + D_kD_k^T) \times (XX^T + YY^T) = (2n)^{k+1}m(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_{(2n)^{k+1}m}.$$

Далее, легко показать, что

$$PQ^T = QP^T, PQ \in \{A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}\}.$$

Теорема доказана.

Следствие 2. *Существует p-семейство Вильямсона типа* $(1, 4, 4, I_k)$, *где* $k = \prod_i 2^{\alpha_i} n_i^{\alpha_i}$, $n_i \in L$, α_i — *целые неотрицательные числа.*

ТЕОРЕМА 5. *Если существуют p-семейство Вильямсона типа* $(1, 4, 4, I_k)$ *и семейство Вильямсона типа* $(1, 4, I_n)$, *то существует семейство Вильямсона типа* $(1, 4, I_{nk})$.

Доказательство теоремы вытекает из определения семейств и p-семейств Вильямсона. На самом деле, если $\{A_i(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ — p-семейство Вильямсона типа $(1, 4, 4, I_k)$, а $\{A, B, C, D\}$ — семейство Вильямсона типа $(1, 4, I_n)$, то множество $\{A_i(A, B, C, D)\}$ является семейством Вильямсона типа $(1, 4, I_{nk})$.

Следствие 3. *Существует семейство Вильямсона типа* $(1, 4, I_k)$, *где* $k = m\Pi_i 2^{\alpha_i} n_i^{\alpha_i}$, m — *порядок матриц типа Вильямсона,* $n_i \in L$, α_i — *целые неотрицетельные числа.*

В частности из теоремы 5 и следствия 3 вытекает:

Следствие 3. *Существуют матрицы типа Вильямсона четных порядков* $2n$, *где* $n \in V$,

$V = \{35, 37, 39, 43, 49, 51, 55, 63, 69, 77, 81, 85, 87, 93, 95, 99, 105, 111, 115, 117, 119, 121, 125, 129, 133, 135, 143, 145, 147, 155, 161, 165, 169, 171, 175, 185, 187, 189, 195, 203, 207, 209, 215, 217, 221, 225, 231, 243, 247, 253, 255, 259, 261, 273, 275, 279, 285, 289, 297, 299, 301, 315, 319, 323, 325, 333, 341, 345, 351, 357, 361, 363, 377,$

387, 391, 399, 403, 405, 407, 425, 429, 437, 441, 455, 459, 465, 473, 475, 481, 483, 493, 495, 513, 525, 527, 529, 551, 555, 559, 561, 567, 575, 589, 609, 621, 625, 627, 637, 645, 651, 667, 675, 693, 713, 725, 729, 731, 759, 775, 777, 783, 817, 819, 825, 837, 851, 891, 899, 903, 925, 957, 961, 989, 999, 1023, 1073, 1075, 1081, 1089, 1147, 1161, 1221, 1247, 1333, 1365, 1419, 1547, 1591, 1729, 1849, 2013, 2093, 2275, 2457, 2639, 2821, 3003, 3367, 3913}.

Отметим, что матрицы типа Вильямсона порядков $2 \cdot 39$, $2 \cdot 105$, $2 \cdot 171$, $2 \cdot 203$, $2 \cdot 303$, $2 \cdot 333$, $2 \cdot 689$, $2 \cdot 903$, $2 \cdot 915$, $2 \cdot 1603$ были получены Валиссом [10], а построение матриц типа Вильямсона порядков $2 \cdot 35$, $2 \cdot 65$, $2 \cdot 77$ приведены в работе [4].

Заметим, что если существуют матрицы типа Вильямсона порядка m, то из леммы 2 вытекает существование матриц типа Вильямсона порядка $2m$. Ценность следствия 4 заключается в том, что не зная существования матриц типа Вильямсона поядка n, удается построить матрицы типа Вильямсона порядка $2n$.

ТЕОРЕМА 6. *Если существуют семейства Вильямсона соответственно типа* $(1, l, I_n)$ *и* $(1, l, I_m)$, $l = 2, 4$, *то существует семейство Вильямсона типа* $(1, k, I_{mn})$, $k = 2, 4, 8$.

Доказательство. Пусть $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ и $\{A, B, C, D\}$ — семейства Вильямсона типа $(1, 4, I_n)$ и $(1, 4, I_m)$. Рассмотрим следующие матрицы:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= (1/2)\,[P_1 \times (A + B) - P_2 \times (A - B)],\\
X_2 &= (1/2)\,[P_1 \times (A - B) + P_2 \times (A + B)],\\
X_3 &= (1/2)\,[P_3 \times (A + B) - P_4 \times (A - B)],\\
X_4 &= (1/2)\,[P_3 \times (A - B) + P_4 \times (A + B)],\\
X_5 &= (1/2)\,[P_1 \times (C + D) - P_2 \times (C - D)],\\
X_6 &= (1/2)\,[P_1 \times (C - D) + P_2 \times (C + D)],\\
X_7 &= (1/2)\,[P_3 \times (C + D) - P_4 \times (C - D)],\\
X_8 &= (1/2)\,[P_3 \times (C - D) + P_4 \times (C + D)].
\end{aligned}
$$

Докажем, что X_i, $i = 1, 2, \ldots, 8$ — матрицы типа Вильямсона порядка mn. Легко убедиться, что $X_i X_j^T = X_j X_i^T$, $i, j = 1, 2, \ldots, 8$.

Вычислим

$$X_1X_1^T=(1/4)[P_1P_1^T\times(A+B)(A+B)^T+$$
$$+P_2P_2^T\times(A-B)(A-B)^T-2P_1P_2^T\times(AA^T-BB^T)],$$
$$X_2X_2^T=(1/4)[P_1P_1^T\times(A-B)(A-B)^T+$$
$$+P_2P_2^T\times(A+B)(A+B)^T+2P_1P_2^T\times(AA^T-BB^T)],$$
$$X_3X_3^T=(1/4)[P_3P_3^T\times(A+B)(A+B)^T+$$
$$+P_4P_4^T\times(A-B)(A-B)^T-2P_3P_4^T\times(AA^T-BB^T)],$$
$$X_4X_4^T=(1/4)[P_3P_3^T\times(A-B)(A-B)^T+$$
$$+P_4P_4^T\times(A+B)(A+B)^T+2P_3P_4^T\times(AA^T-BB^T)].$$

Откуда

$$\sum_{i=1}^4 X_iX_i^T=$$
$$=(1/2)(P_1P_1^T+P_2P_2^T+P_3P_3^T+P_4P_4^T)\times(AA^T+BB^T).$$

Получили

$$\text{а)}\ \sum_{i=1}^4 X_iX_i^T=(1/2)\sum_{i=1}^4 P_iP_i^T\times(AA^T+BB^T).$$

Аналогично можно показать, что

$$\text{б)}\ \sum_{i=5}^8 X_iX_i^T=(1/2)\sum_{i=1}^4 P_iP_i^T\times(CC^T+DD^T).$$

Суммируя выражения а) и б), получим

$$\sum_{i=1}^8 X_iX_i^T=$$
$$=(1/2)\sum_{i=1}^4 P_iP_i^T\times(AA^T+BB^T+CC^T+DD^T).$$

Но так как P_1, P_2, P_3, P_4 и A, B, C, D — матрицы типа Вильямсона порядка n и m, то имеют место равенства

$$P_1P_1^T+P_2P_2^T+P_3P_3^T+P_4P_4^T=4nI_n,$$
$$AA^T+BB^T+CC^T+DD^T=4mI_m.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^8 X_iX_i^T=8mnI_{mn},$$

т. е. множество $\{X_i\}_{i=1}^8$ образует семейство Вильямсона типа $(1,\ 8,\ I_{mn})$.

Рассмотрим случай, когда $l=2$, т. е. множества $\{P_1, P_2\}$ и $\{A, B\}$ образуют семейства Вильямсона. Можно проверить, что $\{X_1, X_2\}$ является семейством Вильямсона типа $(1, 2, I_{mn})$.

Пусть теперь $\{A, B\}$ и $\{P_i\}_{i=1}^4$ образуют семейства Вильямсона типа $(1, 2, I_m)$ и $(1, 4, I_n)$. Легко убедиться, что $\{X_i\}_{i=1}^4$ образует семейство Вильямсона типа $(1, 4, I_{mn})$. Теорема полностью доказана.

В частности, из теоремы 6 вытекает

Следствие 5. *Существуют* 8 *матриц типа Вильямсона порядка* mn, *где* $m, n \in L$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть* X, Y — $(0, -1, +1)$-*матрицы порядка* n, *удовлетворяющие условиям* (2) *и множество*

$$\{A_0, B_0, C_0, D_0, E_0, F_0, G_0, H_0\}$$

является семейством Вильямсона типа $(1, 8, I_m)$, *тогда множество матриц*

$$\begin{aligned} A_i &= A_{i-1} \times X + B_{i-1} \times Y, & B_i &= B_{i-1} \times X - A_{i-1} \times Y, \\ C_i &= C_{i-1} \times X + D_{i-1} \times Y, & D_i &= D_{i-1} \times X - C_{i-1} \times Y, \\ E_i &= E_{i-1} \times X + F_{i-1} \times Y, & F_i &= F_{i-1} \times X - E_{i-1} \times Y, \\ G_i &= G_{i-1} \times X + H_{i-1} \times Y, & H_i &= H_{i-1} \times X - G_{i-1} \times Y \end{aligned}$$

образует семейство Вильямсона типа $(1, 8, I_{mn^i})$, $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство теоремы 7 проводится аналогично доказательству теоремы 6.

Из теоремы 7 в частности вытекает

Следствие 6. *Существуют* 8 *матриц типа Вильямсона порядка* $2mnk$, *где* $m, n, k \in L$.

Пусть X, Y — симметрические матрицы порядка n, удовлетворяющие условиям (2), тогда из теорем 4 и 7 вытекает

Следствие 7. *Существуют симметрические семейства Вильямсона типа* $(1, 4, I_{(2n)^i m})$ *и* $(1, b, I_{(2n)^i m})$, *где* m — *порядок симметрических матриц типа Вильямсона.*

Авторы выражают искреннюю признательность В. А. Зиновьеву за полезное обсуждение настоящей работы.

Вычислительный центр
АН Арм. ССР

Поступило
26.XII.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Wallis W. D., Street A. P., Wallis J. S., Combinatorics; room squares, sumfree sets, Hadamard matrices, Lecture Notes in Math., **272**, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1972, 273—445.

[2] Geramita A. V., Wallis J. S., Orthogonal designs II. Queen's Mathematical Preprint, № 1974-7.

[3] Geothals J. M., Seidal J. J., A skew-Hadamard matrix of order 36, J. Austral. Math. Soc., **11** (1970), 343—344.

[4] Саруханян А. Г., О массивах типа Геталс — Зейделя, Уч. зап. ЕГУ, № 1 (1979), 12—19.

[5] Turyn R. J., An infinite class of Williamson matrices, J. Combinatorial Theory, Ser. A, **12** (1972), 319—321.

[6] Turyn R. J., Computation of certain Hadamard matrices, Notices Amer. Math. Soc., **20** (1973), A—2.

[7] Wallis J. S., Same matrices of Williamson type, Utilitas Math., **4** (1973), 147—154.

[8] Wallis J. S., Construction of Williamson type matrices, Linear and Multilinear Algebra, **3** (1975), 197—207.

[9] Wallis J. S., On Hadamard matrices, J. Combinatorial Theory, Ser. A, **18** (1975), 149—164.

[10] Wallis J. S., Williamson matrices of even order, Lecture Notes in Math., Combinatorial mathematics, **403**, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1974, 132—142.

[11] Spence E., An infinite family of Williamson matrices, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, **24** (1977), 252—256.

[12] Саруханян А. Г., Обобщенные матрицы типа Вильямсона, Уч. зап. ЕГУ, № 2 (1978), 3—11.

[13] Plotkin M., Decomposition of Hadamard matrices, J. Combinatorial Theory, Ser. A, № **2** (1972), 127—130.